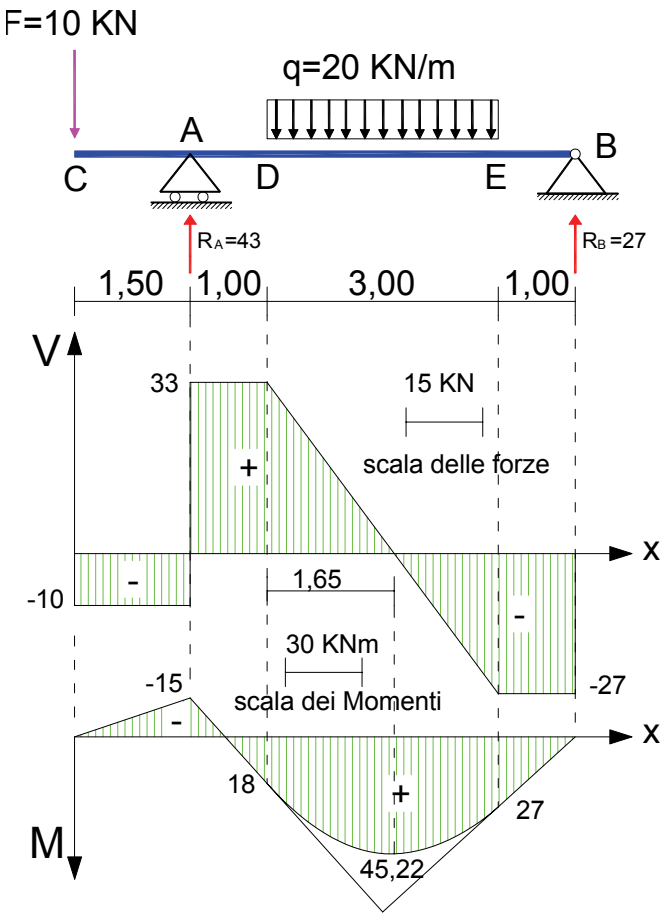
APPUNTI DI COSTRUZIONI

Volume 2



- **Modellazione strutturale**
- **Equilibrio esterno**
- **Equilibrio interno**

Vers. 1.2 – 02/2009

Volume 1
- Sistemi di Forze
- Geometria delle masse

Volume 2
- La modellazione strutturale
- Equilibrio esterno (reazioni vincolari)
- Equilibrio Interno (Caratteristiche della sollecitazione)

Volume 3
- Le tensioni e la verifica di resistenza nelle travi

Volume 4
- La linea elastica
- Le travi iperstatiche

Roberto Lapiello

SOMMARIO

Premessa *5*

1 – Modellazione Strutturale **7**

1.1 – Il Corpo rigido. *7*

1.2 - La Trave *8*

1.3 - I vincoli *9*

1.3.1 - Il carrello **10**

1.3.2 - Il pendolo **11**

1.3.3 - La cerniera **11**

1.3.4. - L'incastro **12**

1.4 - Le Strutture *12*

1.5 - I Carichi *17*

2 – Equilibrio esterno nelle strutture isostatiche (Ricerca delle reazioni vincolari) **21**

2.1 – Un semplice esempio di struttura *22*

2.2 - La presenza dei carichi distribuiti *24*

2.3 - Trave semplice orizzontale con carrello inclinato *25*

2.4 - La Mensola *26*

2.5 - Trave semplice caricata da una coppia concentrata *27*

2.6 - Mensola soggetta a un carico distribuito di forma triangolare *28*

2.7 - Trave semplice, inclinata e soggetta ad un carico uniforme verticale *29*

2.7 - Le Travi Gerber *31*

2.7.1 - Trave Gerber con due cerniere interne **33**

2.8 - I Portali..... 35

2.9 - Le strutture reticolari..... 36

3 – L'equilibrio interno 39

3.1 - Le caratteristiche della sollecitazione 41

3.1.1 – Esempi Applicativi 45

4 – I Diagrammi delle Caratteristiche della sollecitazione 59

4.1 - La trave semplice caricata da una forza concentrata..... 59

4.2 - La trave semplice caricata da forze concentrate..... 66

4.3 - La trave semplice caricata da una coppia concentrata..... 70

4.4 - La trave semplice caricata da un carico distribuito uniforme 72

4.5 - Le proprietà dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione..... 74

4.5.1 – Le proprietà del diagramma del Taglio 74

4.5.2 - Il diagramma del Momento.....75

4.6 – Altri schemi strutturali tipici 75

4.6.1 – Trave semplicemente appoggiata caricata da un carico distribuito uniforme e da due coppie agli appoggi.....75

4.6.2 – Mensola caricata da una forza concentrata in punta 77

4.6.3 – Mensola caricata da un carico distribuito uniforme 77

4.7 – Alcuni esempi di strutture..... 78

4.7.1 – Esempio strutturale n° 1 (trave semplice con sbalzo) 78

4.7.2 – Esempio strutturale n° 2 (trave Gerber) 80

4.7.3 – Esempio strutturale n° 3 (trave tipica per una rampa di scale) 82

4.7.4 Esempio numerico n° 4 (il portale) 86

5 – Le Travature Reticolari 89

5.1 - L'equilibrio dei nodi 90

5.1.1 – Esempio numerico n° 1 (Capriata semplice) 91

5.1.2 – Esempio numerico n° 2 (Capriata Inglese) 94

5.2 – Il metodo delle sezioni di Ritter 97

5.2.1 – Un esempio numerico 97

Premessa

La Scienza e la tecnica delle costruzioni ha compiuto negli ultimi anni notevoli passi in avanti, mettendo a frutto tutte le potenzialità di elaborazione e di calcolo offerte dalle nuove tecnologie.
La ricerca sui materiali e sul comportamento degli elementi strutturali ha consentito di mettere appunto modelli numerici di calcolo che approssimano sufficientemente il comportamento reale delle strutture discostandosi anche dai tradizionali modelli di calcolo lineare che fino a 20 anni fa costituivano sostanzialmente l'unico modello di approccio al calcolo strutturale. Negli ultimi tempi anche la normativa tecnica Italiana ha subito un costante processo di adeguamento, allineandosi sempre di più alle conoscenze messe a disposizione dalla ricerca e convergendo sempre di più verso gli Eurocodici che rappresentano oggi quanto di più avanzato esprime il mondo nel settore delle normative tecniche.
Mentre nel campo della progettazione strutturale i professionisti del settore, da almeno un decennio, applicano in maniera diffusa i metodi di calcolo e di verifica agli stati limite, i testi di costruzioni ad uso dei corsi per geometri, ma spesso anche quelli ad uso dei corsi universitari, continuano a presentare la materia in maniera tradizionale come se nulla fosse accaduto negli ultimi 30 anni. Il venir meno del carattere di "buona guida" dei testi scolastici di costruzioni e l'esigenza di adeguare la programmazione e la metodologia didattica ad un approccio logico della materia ed al passo dei tempi, mi hanno indotto a produrre nel corso degli anni diverso materiale didattico che, divenuto ormai organico e sufficientemente completo, è stato raccolto all'interno di questa collana.
I contenuti sviluppati nei diversi volumi consentono di guidare lo studente all'apprendimento dei fondamenti della disciplina secondo i diversi gradi di competenza da acquisire, tralasciando le nozioni superflue in questa fase formativa, ma consentendo un buon grado di approfondimento delle conoscenze e degli algoritmi da utilizzare nella progettazione di semplici elementi strutturali.
Il testo, suddiviso in quattro volumi, è indirizzato principalmente agli studenti del corso per geometri del primo e nella fase iniziale del secondo anno di studio della materia, ma offre spunti di approfondimento (volume 3 e 4) utili anche nella formazione post secondaria e/o universitaria.
La struttura del testo è la seguente:

1) Volume 1
    a. Sistemi di Forze
    b. Geometria delle masse
2) Volume 2
    a. La modellazione strutturale (la Trave)

   b. Problema dell'equilibrio esterno (Reazioni vincolari delle travi isostatiche)
   c. Problema dell'equilibrio interno (Caratteristiche della sollecitazione)
3) Volume 3
   a. Le tensioni e le verifiche di resistenza nelle travi
4) Volume 4
   a. La linea elastica (Stiudio della deformazione delle travi)
   b. Le travi iperstatiche

Il testo, anche in virtù dell'apprezzamento ricevuto dai miei allievi nel corso degli anni, è in continua evoluzione ed allo stato attuale costituisce tutt'ora una bozza seppure molto avanzata. A differenza dei testi scolastici tradizionali non riporta test di verifiche e/o materiale utile alla programmazione didattica, perché sono fermamente convinto che l'apprendimendo degli alunni debba procedere come una continua scoperta nel quale è il docente a fare da guida e da stimolatore della fame di conoscenza. Il testo deve costituire una sorta di manuale a disposizione del docente e degli allievi per decifrare e catalogare i fenomeni ma non può e non deve, specialmente oggi, essere l'unica fonte di apprendimento.

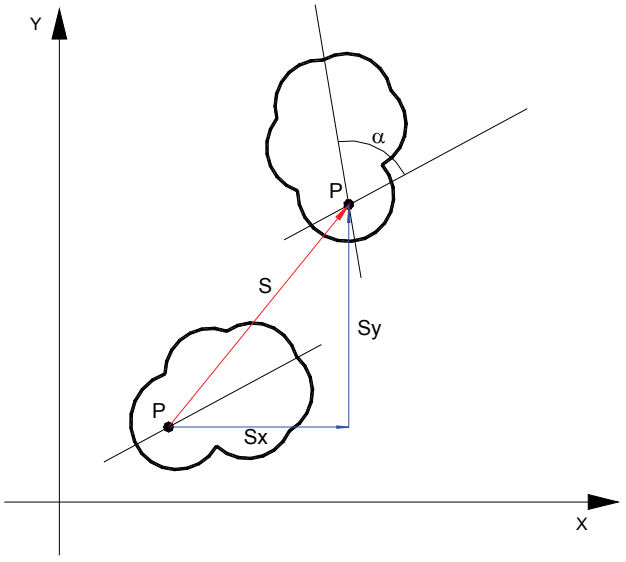
Roberto Lapiello

1 – Modellazione Strutturale

In questo testo si tratteranno solo i modelli strutturali costituiti da elementi trave, rimanendo entro il limite degli schemi strutturali piani e isostatici per i quali la soluzione può essere distinta in due fasi autonome che qui definiremo dell'equilibrio esterno e dell'equilibrio interno. Studiare l'equilibrio esterno significa determinare il sistema di forze che sollecita e tiene in equilibrio statico e cinematico il modello strutturale, mentre lo studio dell'equilibrio interno si occupa delle sollecitazioni che per effetto di questo sistema di forze si esplicano nelle singole sezioni della struttura.

1.1 – Il Corpo rigido.

Si definisce rigido un corpo che, libero di muoversi, quando è sottoposto all'azione di un sistema di forze cambia la sua posizione nel piano senza cambiare la sua forma.



Posto un corpo rigido su un piano, dopo uno spostamento del corpo, la nuova posizione può essere determinata attraverso lo spostamento relativo di un punto **P** generico del corpo e attraverso la rotazione che il corpo ha compiuto nel piano intorno allo stesso punto **P**.

Rappresentando il tutto su un sistema di riferimento cartesiano, il vettore **S** che individua la traslazione subita nel piano dal punto **P** può scomporsi nelle sue componenti secondo gli assi cartesiani di riferimento **Sx** e **Sy**.

Per quanto appena detto consegue che :

Un corpo rigido libero di muoversi nel piano presenta tre possibilità di spostamento, una rotazione, una traslazione lungo l'asse di riferimento X ed una traslazione lungo l'asse di riferimento Y.

Le possibilità di movimento di un corpo rigido vengono solitamente definite come gradi di libertà che il corpo possiede, per tal motivo si afferma che:

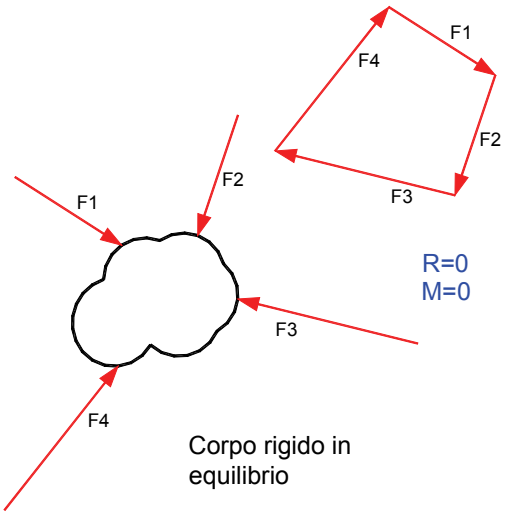
Un corpo rigido libero di muoversi nel piano possiede tre gradi di libertà.

Un corpo rigido libero di muoversi nel piano soggetto ad un sistema di forze, resta in equilibrio (non subisce spostamenti) se il sistema di forze che lo sollecita è un sistema equilibrato. Si ricorda che un sistema di forze si dice equilibrato quando presenta risultante nulla e momento risultante

nullo rispetto ad un qualunque punto del piano.

Dal punto di vista grafico il sistema è equilibrato se presenta il poligono delle forze chiuso ed il poligono funicolare con il primo ed ultimo lato coincidente, mentre dal punto di vista analitico devono verificarsi le tre seguenti condizioni:

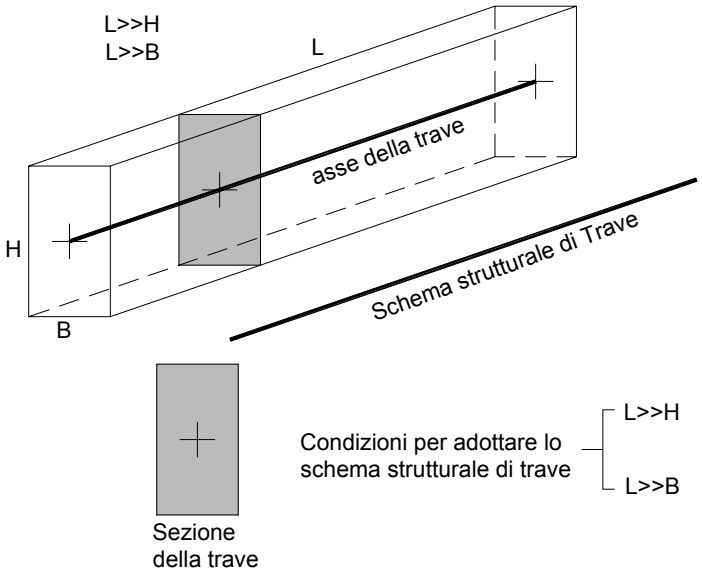
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M(\mathrm{O}) = 0 \end{cases}$$



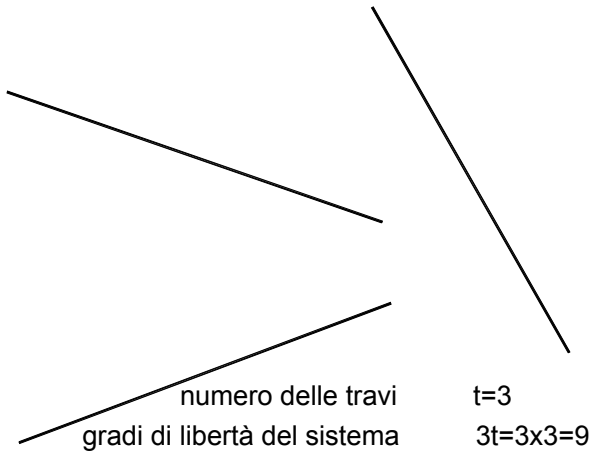
Queste sono le cosiddette *equazioni cardinali della statica* ed esprimo la condizione di equilibrio di un corpo rigido soggetto ad un sistema di forze. In particolare la prima equazione esprime l'equilibrio alla traslazione lungo la direzione **X** del sistema di assi coordinato, la seconda l'equilibrio alla traslazione lungo la direzione **Y** e la terza l'equilibrio alla rotazione intorno ad un punto arbitrario **O** del piano.

1.2 - La Trave

La trave costituisce uno degli elementi di base nelle costruzioni moderne. In particolare si può definire trave *un elemento strutturale di forma prismatica nel quale la lunghezza è almeno pari a 3÷4 volte le dimensioni della sezione.* Ai fini della modellazione strutturale (schematizzazione di una struttura reale ai fini del calcolo strutturale) una trave è rappresentata con un segmento coincidente con l'asse della trave reale. Considerando la trave come un particolare corpo rigido si può affermare che *una trave, libera di muoversi nel piano cartesiano, possiede tre possibilità di movimento (tre gradi di libertà) e cioè può traslare nella direzione dell'asse X, può traslare nella direzione dell'asse Y e può ruotare nel piano XY.*



Un insieme di travi non collegate rigidamente tra di loro, possiede un numero di gradi di libertà pari a tre volte il numero delle travi (tre gradi di libertà per ogni trave), quindi se indichiamo con **t** il numero di travi libere che costituiscono il sistema, il numero dei gradi di libertà in totale sarà pari a **3t**.



Le strutture portanti di un manufatto edilizio devono essere ovviamente realizzate in maniera tale da non possedere alcun grado di libertà, altrimenti verrebbe meno la capacità di soddisfare i requisiti stessi per e quali sono realizzate. Per eliminare la possibilità di spostamenti liberi delle strutture, si realizzano dei collegamenti tra le travi stesse e tra queste ed il "terreno" (in questa frase si intende per terreno un corpo rigido esterno che non possiede alcuna possibilità di movimento), realizzando così un sistema strutturale i cui elementi mantengono stabile la loro posizione anche al variare arbitrario delle forze esterne applicate sulla struttura. Un tale sistema strutturale è idoneo ad essere utilizzato ai fini costruttivi dei manufatti edilizi.

1.3 - I vincoli

I vincoli sono elementi strutturali che hanno la funzione di bloccare alcuni o tutti i gradi di libertà di una strattura; realizzano in pratica quei collegamenti tra le singole travi e tra queste ed il "terreno" in modo da ottenere un organismo strutturale funzionale agli scopi per cui lo si realizza.

Diversi sono i tipi di vincoli che vengono schematizzati nella scienza delle costruzioni, ognuno con un nome specifico e con funzioni specifiche. Nelle applicazioni piane si classificano tre famiglie fondamentali di vincolo:

- ***vincolo semplice***.
  - *E' detto vincolo semplice quel vincolo che è in grado di bloccare un solo grado di libertà;*
- ***vincolo doppio***.
  - *Si dice doppio quel vincolo che è in grado di bloccare due gradi di libertà del sistema;*
- ***vincolo triplo***.
  - *Si dice triplo quel vincolo che è in grado di bloccare tutti e tre i gradi di libertà disponibili per un corpo rigido nel piano.*

I vincoli possono anche essere distinti e classificati come:

- ***vincoli esterni***.
  - Quei vincoli che collegano la struttura al "terreno"

- ***vincoli interni*** (detti anche snodi).
    - Quei vincoli che realizzano il collegamento tra due o più travi.

Quanto detto finora sui vincoli attiene al punto di vista cinematico delle strutture, mentre dal punto di vista delle forze (statico), va osservato che, se un vincolo blocca uno spostamento, vuol dire nella sostanza che può esercitare sulla struttura un forza (reazione vincolare) in grado di opporsi a quello spostamento.

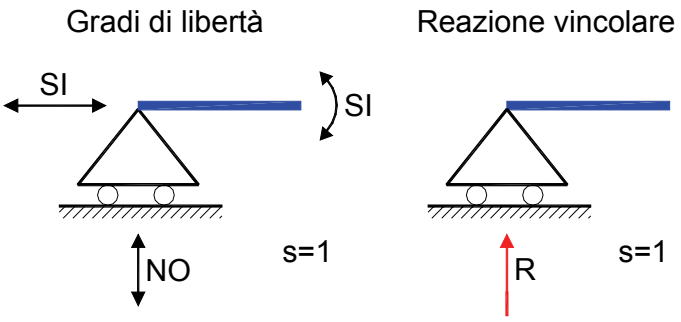
Tenendo a riferimento la classificazione prima effettuata, dal punto di vista statico, può affermarsi quanto segue:

- ***vincolo semplice***.
    - *E' in grado di esercitare una sola reazione vincolare*
- ***vincolo doppio***.
    - *E' in grado di esercitare due reazioni vincolari.*
- ***vincolo triplo***.
    - *E' in grado di esercitare tre reazioni vincolari.*

I vincoli che qui trattiamo si intendono bilaterali e lisci. Lisci in quanto privi di attrito e bilaterali nel senso che le reazioni vincolari possono agire secondo entrambi i versi possibili.

Verranno qui presentati i principali vincoli in uso nei sistemi piani con le esemplificazioni tipiche relative ai sistemi strutturali analizzati nei corsi di scienza delle costruzioni per i geometri.

1.3.1 - Il carrello



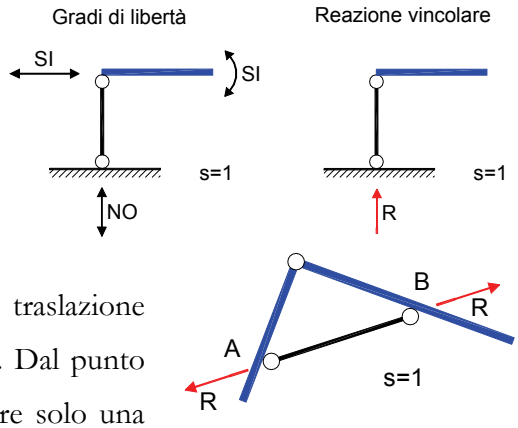
Il carrello viene solitamente rappresentato come un triangolo che poggia su due cilindretti i quali consentono lo scorrimento del carrello sul terreno lungo il piano di contatto. Si tratta di un vincolo semplice esterno che è in grado di bloccare esclusivamente la traslazione lungo l'asse perpendicolare al piano di scorrimento. Dal punto di vista cinematico, un tratto di trave libero da un estremo e vincolato all'altro estremo con un carrello, conserva la sua capacità di ruotare e di traslare lungo il piano di scorrimento del carrello mentre, al punto dove la trave e collegata al carrello non è consentita la traslazione lungo l'asse perpendicolare al piano di scorrimento. Indicando con la lettera s i gradi di libertà che un vincolo sopprime, per un carrello si può affermare che $s = 1$ (vincolo semplice).

Dal punto di vista statico si osserva che il carrello, impedendo la traslazione lungo l'asse perpendicolare al piano di scorrimento, deve essere in grado di esercitare una reazione vincolare

proprio lungo tale direzione. Si è soliti indicare la reazione vincolare di un carrello con la lettera **R**.

1.3.2 - Il pendolo

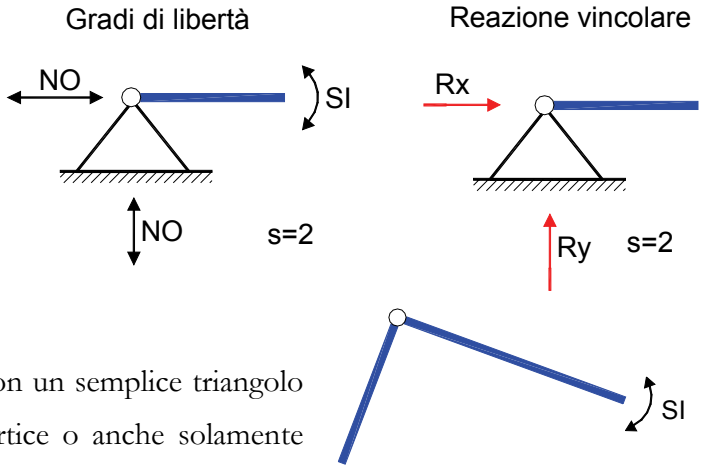
Il pendolo è un vincolo semplice che può essere utilizzato sia come vincolo esterno sia come vincolo interno. Come vincolo esterno assume un comportamento del tutto simile al carrello, bloccando solo il grado di libertà relativo allo spostamento lungo la direzione dell'asse del pendolo. Resta consentita la rotazione dell'asta e la traslazione lungo la direzione perpendicolare all'asse del pendolo. Dal punto di vista delle forze un pendolo è in grado di esercitare solo una reazione vincolare che agisce nella direzione dell'asse del pendolo.



Utilizzato come vincolo interno, il pendolo fa in modo che la distanza tra i due punti della struttura collegati resti immutata. Ciò dal punto di vista delle forze significa che il pendolo interno reagisce alle estremità con due forze uguali e contrarie nella direzione del pendolo. Anche per il pendolo si ha, in quanto vincolo semplice, si ha $s = 1$.

1.3.3 - La cerniera

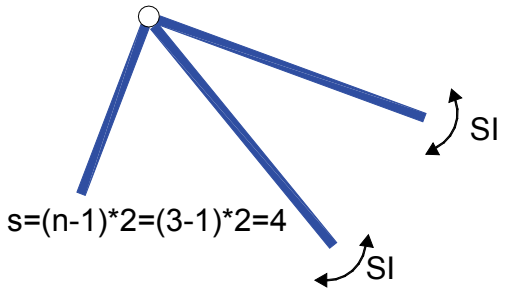
La cerniera è un vincolo doppio che può essere utilizzato sia come vincolo esterno sia come vincolo interno. Come vincolo esterno viene solitamente schematizzato con un triangolo bloccato a terra sormontato da un cerchietto al quale si connette la trave. Si è anche soliti schematizzarla con un semplice triangolo bloccato a terra senza cerchietto al vertice o anche solamente con un cerchietto collegato a terra. Al di là della modalità di rappresentazione grafica, la cerniera è un vincolo doppio in quanto blocca entrambi le traslazioni lungo gli assi coordinati di riferimento lasciando libera la sola rotazione del tratto di trave collegata. Dal punto di vista delle forze, la cerniera esterna è in grado di esercitare sulla struttura due reazioni vincolari, una reazione vincolare parallela all'asse **Y** di riferimento che indicheremo con R_Y ed una reazione vincolare parallela all'asse **X** che indicheremo con R_X.



Se utilizzata come vincolo interno, la cerniera impedisce la traslazione relativa tra i due punti delle

travi nel quale è realizzato il collegamento; ovviamente ognuno dei due tratti di trave resta libero di ruotare rispetto all'altro tratto.

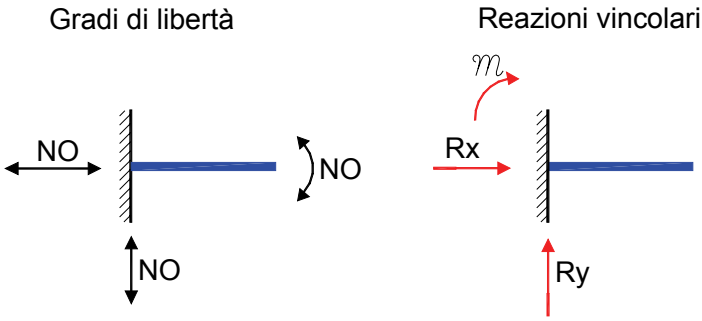
Se una cerniera collega più di due travi i gradi di libertà soppressi saranno pari a $(n-1)\cdot 2$, dove n rappresenta il numero di tratti collegati tramite la cerniera.



Nell'esempio riportato a fianco la cerniera interna collega tre travi e pertanto i gradi di libertà soppressi dalla cerniera saranno $s=(3-1)\cdot 2=4$. Lascio al lettore il compito di comprendere ed accertare la validità della formula.

1.3.4. - L'incastro

L'incastro è un vincolo di tipo esterno che è in grado di bloccare entrambe le traslazioni lungo la direzione degli assi coordinati ed anche la rotazione dell'estremo della trave ad esso collegato. Come sua rappresentazione simbolica, adotteremo una linea doppia rappresentante il terreno.



Dal punto di vista delle forze l'incastro, per bloccare le traslazioni lungo gli assi coordinati, deve esercitare le due reazioni vincolari R_X ed R_Y e, per poter bloccare anche la rotazione, deve esercitare anche una reazione vincolare caratterizzata da una coppia $\mathcal{M}$.

Per l'incastro si ha che $s=3$.

1.4 - Le Strutture

Una struttura può intendersi come un insieme di una o più travi collegate tra di loro ed al terreno attraverso un sistema di vincoli. Lo schema strutturale che si ottiene deve, con sufficiente approssimazione, in qualche modo rappresentare un organismo costruttivo reale del quale si vuole analizzare il comportamento statico e/o cinematico. Tutte le costruzioni sono costituite da strutture. Si possono avere strutture nelle quali tutti i gradi di libertà del sistema sono impediti (strutture che non conservano alcuna possibilità di cinematismo), come per esempio è il caso delle strutture utilizzate in campo edile (ponti, edifici, etc…), oppure si possono avere strutture che, attraverso le possibilità residue di cinematismo trasmettono energia, come è il caso di alcune strutture utilizzate nel campo della meccanica (alberi motore e macchine in genere). Le strutture

vengono classificate e suddivise in labili, isostatiche e iperstatiche.

- **strutture labili**: sono quelle strutture nelle quali non tutti i gradi di libertà del sistema sono soppressi dai vincoli. Queste strutture conservano alcune possibilità di spostamento rigido (i gradi di libertà non soppressi dai vincoli) che vengono definiti come gradi di labilità del sistema e solitamente indicati con la lettera l.
- **strutture isostatiche**: sono quelle strutture nelle quali i gradi di libertà soppressi dai vincoli sono esattamente quelli che la struttura avrebbe in assenza dei vincoli. Le strutture isostatiche sono quindi caratterizzate dal non presentare possibilità di movimento (gradi di labilità uguale a zero, $l = 0$).
- **strutture iperstatiche**: sono quelle strutture nelle quali i gradi di libertà soppressi dai vincoli sono in eccesso rispetto a quelli che il sistema presenta in assenza di vincoli. Più precisamente nelle strutture iperstatiche vi sono uno o più vincoli che sopprimono i medesimi gradi di libertà (le stesse possibilità di spostamento rigido). I gradi di libertà soppressi in eccesso dai vincoli iperstatici vengono detti gradi di iperstaticità del sistema ed indicati con la lettera i.

Oltre ai tre casi appena definiti, si possono avere anche strutture che sono allo stesso tempo labili ed iperstatiche; queste sono quelle strutture nelle quali seppur ci sono dei vincoli sovrabbondanti permangono gradi di libertà non soppressi da opportuni vincoli. Queste strutture saranno caratterizzate dal presentare sia $l \neq 0$ sia $i \neq 0$.

Esiste una relazione che è rispettata dalle strutture e che può essere utilizzata al fine di determinare l'appartenenza di una struttura ad un tipo specifico, ed è la seguente:

$$3t - s = l - i$$

Tale relazione rappresenta di fatto il bilancio cinematico di una struttura. In virtù di tale formula si possono distinguere i seguenti casi:

- *1° Caso* $\begin{cases} 3t - s > 0 \\ l \neq 0 \end{cases}$
    - Se il primo termine della relazione di bilancio è maggiore di zero, significa che nel secondo al fine di ottenere un risultato positivo si deve avere il grado di labilità l della struttura deve essere diverso da zero e maggiore del grado di iperstaticità i; *la struttura è certamente labile* e se è $i \neq 0$ anche iperstatica. Affinchè la struttura sia solamente labile occorre che sia $i = 0$ altrimenti, nonostante la struttura presenta dei "vincoli iperstatici" permane la possibilità di l spostamenti rigidi. La struttura presenta più labilità che iperstaticità.

- *2° Caso* $\begin{cases} 3t - s = 0 \\ l = 0 \\ i = 0 \end{cases}$
    - Se il primo termine della relazione è uguale a zero, significa che i gradi di libertà soppressi dai vincoli sono in numero pari a quelli posseduti dalla struttura in assenza dei vincoli. Tale condizione è necessaria ma non sufficiente per poter affermare che la struttura sia isostatica. Infatti si potrebbe presentare il caso in cui, nonostante il primo termine della relazione è uguale a zero, la struttura presenti un egual grado di labilità e di iperstaticità ($l = i$). *Affinché una struttura possa essere correttamente classificata di tipo isostatico occorre che il primo membro della relazione sia uguale a zero e che almeno uno dei due termini del secondo membro sia anch'esso uguale a zero.* E' ovvio che per la relazione di bilancio in questo caso se per esempio si individua con chiarezza che la struttura in esame non presenta gradi di labilità ne consegue che la struttura non presenta nemmeno gradi di iperstaticità. Se si dovesse verificare che la struttura presenta comunque un certo grado di labilità per la relazione di bilancio la struttura dovrà presentare anche un identico grado di iperstaticità e cioè la struttura sarebbe contemporaneamente labile ed iperstatica con pari grado.
- *3° Caso* $\begin{cases} 3t - s < 0 \\ i > 0 \end{cases}$
    - In questo caso, risultando il primo termine minore di zero ne consegue che al secondo termine deve certamente verificarsi che la struttura presenti un certo grado di iperstaticità. La struttura è certamente iperstatica. Può aversi comunque anche il caso in cui la struttura oltre ad essere iperstatica presenti anche un certo grado di labilità, ma ovviamente deve verificarsi che i gradi di iperstaticità siano maggiori del numero dei gradi di labilità, *la struttura è in tal caso labile ed iperstatica allo stesso tempo.*

Al fine di chiarire meglio i concetti qui espressi in merito alla classificazione delle strutture si analizzano alcuni semplici esempi.

Esempio n° 1

3t=3 ; s=2+1=3

Struttura isostatica

3t-s=0
l=0

E' qui rappresentata una struttura costituita da un tratto di trave vincolata a sinistra con una cerniera ed a destra con un carrello, entrambi con piano di scorrimento orizzontale. In assenza di vincoli i gradi di

libertà del sistema sarebbero 3 in quanto la struttura è costituita da un unico tratto: $3 \cdot t = 3 \cdot 1 = 3$. I vincoli sopprimono in totale 3 gradi di libertà, in quanto per la cerniera è $s = 2$ e per il carrello è $s = 1$. In totale i gradi di libertà soppressi dai vincoli sono $s = 2 + 1 = 3$. Siamo nel caso in cui è $3 \cdot t - s = 3 - 3 = 0$. Per poter affermare che la struttura è isostatica abbiamo la necessità di provare che la struttura non presenta labilità; a tal proposito se per un attimo si suppone che non ci fosse il carrello sula destra, l'unica labilità della trave consisterebbe nella possibilità di ruotare intorno alla cerniera, ma tale possibilità è impedita proprio dal carrello e quindi la struttura così com'è non presenta labilità, cioè è $l = 0$. Avendo riscontrato che $3 \cdot t - s = 0$ e che è anche $l = 0$, consegue che deve essere anche $i = 0$ e che la struttura è isostatica. Questa configurazione strutturale è comunemente conosciuta come *trave semplicemente appoggiata*.

Esempio n° 2

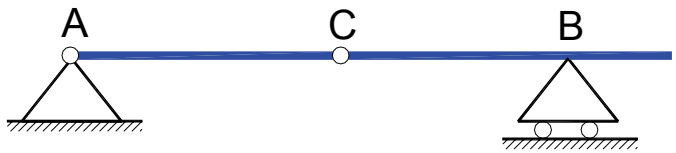
3t=3 ; s=3

Struttura isostatica

3t-s=0
l=0

Si ha in questo caso una trave incastrata all'estremo sinistro. Il conteggio dei gradi di libertà in assenza di vincoli e dei gradi di libertà soppressi dai vincoli è il seguente: $3 \cdot t = 3$ e $s = 3$ (l'incastro sopprime tutti e tre i gradi di libertà possibili nel piano). La relazione di bilancio è la seguente: $3 \cdot t - s = 0$. E' evidente che la trave essendo incastrata ad un estremo non ha possibilità di movimento alcuno, e pertanto è anche $l = 0$. Anche questa struttura è una struttura isostatica. Questa particolare struttura è comunemente conosciuta come *mensola*.

Esempio n° 3



3t=6 ; s=2+2+1=5

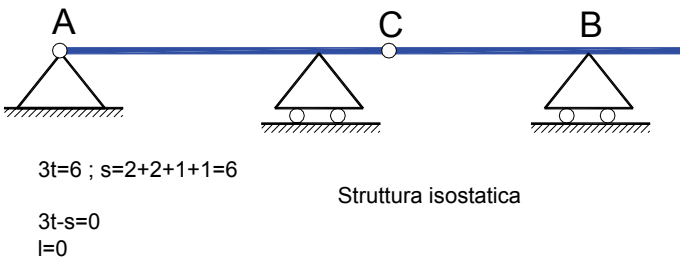
Struttura una volta labile

3t-s=1
l=1

Abbiamo in questo esempio una struttura costituita da due tratti di trave e pertanto è $3 \cdot t = 3 \cdot 2 = 6$. I gradi di libertà soppressi dai vincoli sono: 2 dalla cerniera esterna, 2 dalla cerniera interna e uno dal carrello, in totale si ha $s = 2 + 2 + 1 = 5$. Il primo membro dell'espressione del bilancio cinematico fornisce il seguente valore: $3 \cdot t - s = 6 - 5 = 1$. La struttura è certamente labile. In effetti si può facilmente intuire che la prima trave può ruotare intorno alla cerniera in **A** e che tale rotazione non può essere impedita dal carrello in **B**; infatti il secondo tratto può ruotare intorno a **B** e non potendoci essere spostamenti relativi tra i due tratti nel punto **C** (cerniera interna) il carrello scorrerà orizzontalmente verso il punto **A** consentendo appunto un grado di labilità alla struttura. Consegue che è $l = 1$ e che per la relazione di bilancio

deve essere $i = 0$. La struttura è una volta labile.

Esempio 4



Questa struttura è ricavata dalla precedente aggiungendo un carrello al primo tratto di trave. Il primo membro dell'espressione di bilancio fornisce in questo caso $3 \cdot t - s = 6 - 6 = 0$. Si può facilmente verificare che l'aggiunta del carrello ha eliminato la labilità riscontrata nella struttura precedente infatti il primo tratto di trave non ha più possibilità di movimento in quanto la rotazione intorno ad **A** è impedita dal carrello aggiunto; Il punto C inteso come appartenente al primo tratto non può avere quindi alcuno spostamento rigido. Per effetto della cerniera interna in **C**, il secondo tratto potrebbe ruotare intorno a C, ma tale possibilità è impedita dal carrello in **B**. La struttura non presenta labilità ed essendo $3 \cdot t - s = 0$ e $l = 0$ può considerarsi certamente isostatica.

Esempio 5

Questa struttura può considerarsi ottenuta dalla struttura dell'esempio n° 2 (mensola) con l'aggiunta di un carrello nell'estremo destro della trave. Si ha: $3 \cdot t = 3$; $s = 3 + 1 = 4$ (per l'incastro $s = 3$, e per il carrello è $s = 1$).

$3 \cdot t - s = 3 - 4 = -1$

Dall'espressione di bilancio, considerando che $3 \cdot t - s = -1$ deve essere anche $l - i = -1$. La struttura è certamente iperstatica (3° caso). Guardando la struttura si evince che la trave non ha alcuna possibilità di spostamento rigido, e cioè è $l = 0$ e quindi deve essere $i = 1$. La struttura è una volta iperstatica.

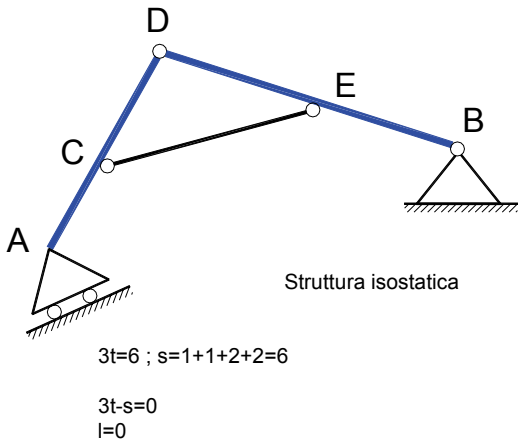
In effetti è evidente che il vincolo sovrabbondante può considerarsi proprio il carrello, infatti questo vincolo tende ad eliminare in questo caso la possibilità di traslazione lungo la direzione verticale del punto di contatto tra carrello e trave, ma tale possibilità di spostamento risulta già impedita dall'incastro che non consente la rotazione della trave.

Esempio 6

La struttura che appresso si rappresenta è apparentemente più complessa ma con un minimo di ragionamento cercheremo di riuscire a classificarla correttamente.

La struttura è composta da due tratti di trave vincolati esternamente con un carrello in **A** e una cerniera in **B**. Internamente, una cerniera in D collega i due tratti di trave mentre il pendolo interno impedisce la traslazione relativa tra i punti **C** ed **E**. I gradi di libertà soppressi dai vincoli

sono: 1 dal carrello in **A**, 1 dal pendolo, 2 dalla cerniera interna e 2 dalla cerniera esterna. Il bilancio fornisce $3 \cdot t - s = 3 \cdot 2 - 6 = 0$. Per la ricerca di eventuali labilità va considerato che il pendolo interno fa si che i due tratti di trave non possono avere rotazioni relative in **D** (se per assurdo ciò fosse possibile la distanza tra i punti **C** e **D** dovrebbe cambiare, ma ciò è impedito dal pendolo), pertanto i due tratti di trave possono essere considerati come se costituissero un unico tratto che può ruotare intorno alla cerniera esterna in **B**; tale possibilità di rotazione è però impedita dal carrello in **A** e pertando a conclusione del ragionamento si desume che è $l = 0$. Essendo $3 \cdot t - s = 0$ e $l = 0$ si può affermare che la struttura è certamente isostatica.



1.5 - I Carichi

In una costruzione edile le strutture portanti assolvono il compito di sostenere i carichi derivanti dagli elementi non strutturali (elementi portati) e quelli dovuti alla funzione a cui la costruzione e dedicata. Un fabbricato residenziale, per esempio, per poter assolvere a questa funzione deve avere i solai in grado di sostenere oltre al peso proprio ed al peso degli elementi non strutturali portati (intonaco, massetto, pavimento ed eventuali muri divisori non portanti), un carico distribuito pari ad almeno 2 KN/m^2. Tale carico è quello statisticamente determinato e fissato dalle norme per poter adibire un fabbricato a civile abitazione. Altri valori del carico sono fissati per gli ulteriori elementi strutturali di impalcato come le scale, i balconi e le coperture, ed ancora valori diversi sono fissati per le diverse destinazione d'uso da attribuire ai locali.

Per quanto appena detto, il modello strutturale deve comprendere anche la rappresentazione dei carichi che agiscono sulla struttura, individuandone tipo e posizione (punto di applicazione sulla struttura).

Per quanto attiene ai carichi, entro i limiti del corso per geometri, possiamo distinguere essenzialmente due tipi di carico:

- **Carichi concentrati**.
    - Sono quei carichi che possono essere assimilati ad una forza o ad una coppia e pertanto rappresentati attraverso un vettore applicato in un punto della struttura.
- **Carichi distribuiti**.
    - Sono carichi che non possono considerarsi concentrati in un solo punto ma che presentano un valore più o meno variabile del carico e distribuiti su di una

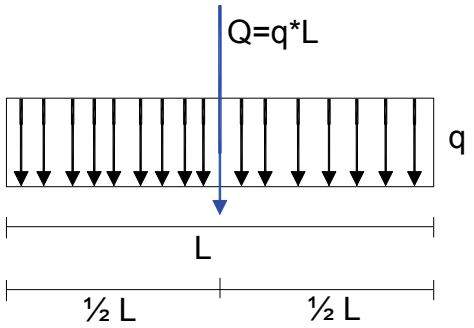
superficie o su una lunghezza.

Nell'esempio prima citato dei solai per civile abitazione le norme prescrivono appunto che tali strutture devono essere in grado di sostenere un carico pari a 2 KN/m^2, cioè si deve pensare ad un sistema di carico che può essere rappresentato tramite tanti vettori forza, tutti uguali, posti uno vicino all'altro, in maniera che si occupi tutta la superficie del solaio ed in modo che su ogni m^2 di superficie del solaio la risultante di dette forze sia pari a 2 KN.

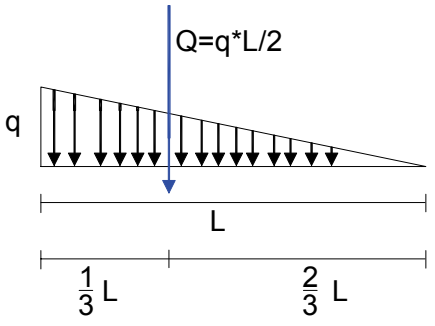
I carichi distribuiti da applicare sulle strutture composte da travi, essendo queste rappresentate solo attraverso la loro lunghezza, devono essere intesi come carichi dovuti ad una serie di forze una vicina all'altra fino ad occupare una certa lunghezza di un tratto di trave.

Dal punto di vista pratico possiamo in questa sede considerare 3 tipologie di carico distribuito.

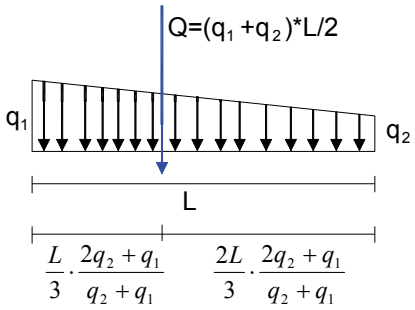
- **Carico uniformemente distribuito**.
  - Un carico uniformemente distribuito è costituito da un insieme di forze tutte uguali poste una di fianco all'altra fino ad occupare una certa lunghezza **L**. Il valore che il carico assume è solitamente indicato attraverso la lettera **q** ed esprime la "quantità" di forza che il carico assume per ogni unità di lunghezza. Esprimendo per esempio le forze in KN e le lunghezze in metro il valore di **q** sarà espresso in KN/m. La risultante di un carico uniformemente distribuito è pari al prodotto del valore del carico **q** per la lunghezza della striscia di carico **L**, e si indica solitamente con la lettera **Q**. Il punto di applicazione della risultante **Q** del carico è posto nel baricentro del rettangolo e ciòè ad ½ **L**.



- **Carico distribuito di forma triangolare**.
  - Questo tipo di carico distribuito è caratterizzato dall'avere un diagramma rappresentativo triangolare. La risultante del carico **Q** è pari all'area del triangolo e cioè $Q = \frac{q \cdot L}{2}$ ed è applicata nel baricentro del triangolo. La risultante Q è posta quindi ad una distanza pari a $\frac{L}{3}$ dal lato dove il carico è pari a **q** e a $\frac{2 \cdot L}{3}$ dall'estremo ove il carico si riduce a zero.



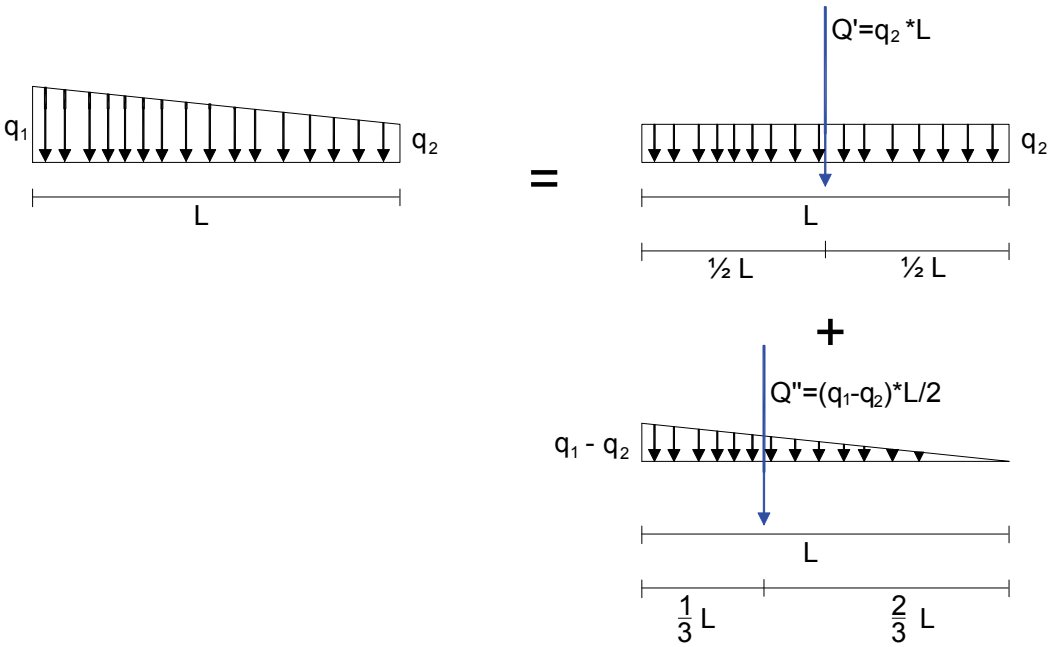
- **Carico distribuito di forma trapezoidale**.
  - Questo tipo di carico è rappresentato da un diagramma a forma di trapezio e presenta quindi due valori di **q** alle estremità del carico, un valore massimo che qui indichiamo con $\mathbf{q_1}$ ed un valore minimo qui indicato con $\mathbf{q_2}$. La risultante **Q** è pari all'area del trapezio e quindi $Q = \frac{(q_1 + q_2)}{2} \cdot L$ ed è applicata nel baricentro del trapezio.



La distanza di **Q** dal lato di $\mathbf{q_1}$ è pari a $\frac{L}{3} \cdot \frac{2q_2 + q_1}{q_2 + q_1}$

La distanza di **Q** dal lato di $\mathbf{q_2}$ è pari a $\frac{2L}{3} \cdot \frac{2q_2 + q_1}{q_2 + q_1}$

E' utile considerare che, dal punto di vista delle forze, un carico trapezoidale può essere scomposto in due carichi: uno uniformemente distribuito e pari al valore minimo del carico $\mathbf{q_2}$ e l'altro come un carico distribuito a forma triangolare con valore del carico pari a $(q_1 - q_2)$.
I due carichi distribuiti così ottenuti si devono considerare presenti contemporaneamente sulla struttura.



2 – Equilibrio esterno nelle strutture isostatiche (Ricerca delle reazioni vincolari)

Come già si è affermato in precedenza, una struttura è composta da uno o più tratti di trave, da uno o più vincoli e da uno o più carichi. Assegnata quindi una struttura il primo problema che ci si pone è quello di determinare le condizioni statiche dell'equilibrio esterno. Risolvere tale problema in effetti significa determinare le reazioni che i vincoli esercitano sulla struttura per ottenere l'equilibrio della stessa sotto un determinata situazione di carico. Ci concentreremo in questa trattazione solo sulle strutture isostatiche per le quali la ricerca delle reazioni vincolari si persegue attraverso delle semplici equazioni di equilibrio. Per tale motivo le strutture isostatiche sono dette anche *staticamente determinate*. Si affronteranno dapprima la ricerca delle reazioni vincolari su strutture costituite da un unico tratto di trave per poi passare ad affrontare il problema su strutture sempre isostatiche ma costituite da più tratti di trave disposti nel piano.

La soluzione del problema della ricerca delle reazioni vincolari viene perseguito attraverso un sistema di equazioni che costituiscono le cosiddette *equazioni cardinali della statica*. Le equazioni cardinali della statica sono in numero di tre e costituiscono ognuna una condizione di equilibrio della struttura, intesa come corpo rigido, in relazione ai singoli gradi di libertà disponibili nel piano: traslazione lungo la direzione **X**, traslazione lungo **Y**, rotazione intorno ad un punto qualunque del piano **XY**).

L'espressione formale delle equazioni cardinali della statica è la seguente:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{(O)} = 0 \end{cases}$$

La prima equazione esprime l'equilibrio tra tutte le componenti delle forze agenti sul sistema strutturale (forze esterne e reazioni vincolari) lungo la direzione **X**. La seconda equazione esprime l'equilibrio tra tutte le componenti delle forze agenti lungo la direzione **Y**, mentre la terza equazione rappresenta l'equilibrio alla rotazione (momento uguale a zero) di tutte le forze agenti sul sistema.

Si passa direttamente ad applicare il metodo su diversi esempi di strutture isostatiche, così da fornire un utile chiarimento applicativo ed una facile guida all'applicazione delle equazioni cardinali della statica nei casi più frequenti che si presentano nella pratica scolastica e professionale.

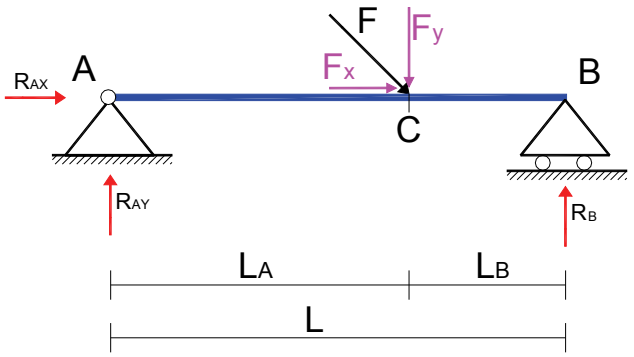
2.1 – Un semplice esempio di struttura

La struttura che si propone di studiare è una trave semplicemente appoggiata, caricata da una forza concentrata **F**.

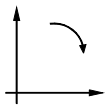
Per trave semplice, come già anticipato nei precedenti paragrafi, si intende una trave vincolata ad un estremo con una cerniera e all'altro estremo con un carrello. La struttura è isostatica e quindi staticamente determinata.

Come primo esempio viene considerata una trave semplice caricata da una sola forza **F**.

La prima operazione da farsi è la scomposizione della forza che sollecita la trave secondo le due direzione degli assi cartesiani utilizzati a riferimento e che solitamente sono la direzione orizzontale e la direzione verticale. Nel nostro caso la forza **F**, scomposta, ci fornirà le due componenti **F**x e **F**y, la prima parallela all'ipotetico asse **X** orizzontale e la seconda parallela all'ipotetico asse **Y** verticale. Supposto che la forza **F** formi un angolo α con la direzione orizzontale si ha:



$$F_x = F \cdot \cos\alpha\,; \qquad F_y = F \cdot sen\alpha$$



Le forze si assumono positive quando hanno il verso coerente con quello degli assi del sistema di riferimento che si riporta a fianco, mentre i momenti sono assunti positivi se orari. Inizialmente si inseriscono nello schema strutturale le ipotetiche reazioni vincolari, disponendole sulla struttura secondo i versi positivi. Nel nostro caso si ha che nel punto **A** la cerniera può esercitare la reazione R_{AX} orizzontale e la reazione R_{AY} verticale, mentre nel punto **B** il carrello può esercitare la sola reazione R_B diretta perpendicolarmente al suo piano di scorrimento e cioè orientata in direzione verticale.

A questo punto possiamo scrivere le equazioni cardinali della statica per la struttura in esame:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_{(A)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{R}_{AX} + F_x = 0 \\ \mathrm{R}_{AY} - F_y + \mathrm{R}_B = 0 \\ L_A \cdot F_y - L \cdot \mathrm{R}_B = 0 \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta l'equilibrio alla traslazione lungo la direzione orizzontale **X**, la seconda l'equilibrio alla traslazione lungo la direzione verticale **Y**, la terza l'equilibrio alla rotazione calcolando i Momenti rispetto al punto **A**. Si noti che i segni nelle relazioni sono attribuiti seguendo il sistema di riferimento e cioè le forze sono assunte positive se il loro verso è coerente con gli assi di riferimento mentre nella terza equazione il momento delle singole forze

intorno ad **A** è positivo se orario. Per la scrittura della terza equazione si è preferito calcolare i momenti intorno al punto **A** per non far comparire nella equazione le reazioni R_{AX} e R_{AY} (queste presentano distanza nulla rispetto al punto **A** e quindi momento nullo) ottenendo quindi una equazione con una sola incognita.

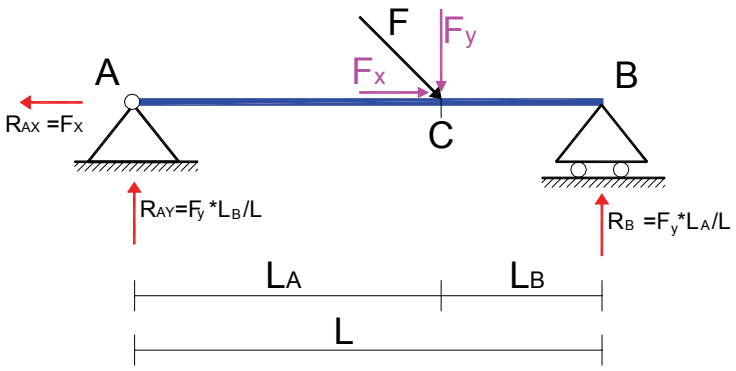
Il sistema di equazioni ottenuto presenta le tre incognite R_{AX}, R_{AY} e R_B e un numero di equazioni pari proprio al numero di incognite. Il sistema ammette una soluzione unica che rappresenta appunto i valori da attribuire alle reazioni vincolari affinché la struttura risulti equilibrata.

Risolvendo il sistema si ha:

$$\begin{cases} R_{AX} = -F_x \\ R_{AY} = \dfrac{(L - L_A)\cdot F_y}{L} = \dfrac{L_B \cdot F_y}{L} \\ R_B = \dfrac{L_A \cdot F_y}{L} \end{cases}$$

Il segno negativo ottenuto nella soluzione della prima equazione per R_{AX} sta a significare che per avere l'equilibrio della struttura questa reazione vincolare deve avere il verso opposto a quello che noi abbiamo ipotizzato, quindi la reazione R_{AX} che fornisce l'equilibrio della struttura deve essere diretta verso sinistra. Nella sostanza noi, all'atto dell'impostazione del problema ipotizziamo un verso e poi verifichiamo la correttezza dell'ipotesi assunta attraverso il segno algebrico dei risultati. Se il risultato di una reazione vincolare sarà positivo vuol dire che il verso ipotizzato è corretto se è negativo il verso ipotizzato è errato.

Si riporta di seguito la soluzione del problema affrontato rappresentando di nuovo la struttura e i giusti versi delle reazioni ottenuti dalla soluzione del problema.

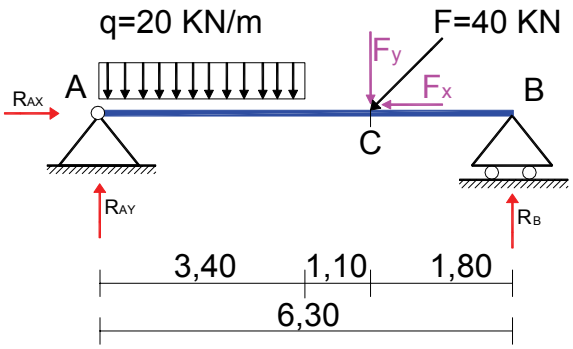


Si noti che nella rappresentazione della soluzione, i vettori che schematizzano le reazioni vincolari sono disegnati con il verso coerente con le soluzioni trovate, i valori delle reazioni (moduli dei vettori) sono stati riportati in valore e senza segno algebrico.

2.2 - La presenza dei carichi distribuiti

E' assegnata la trave semplice rappresentata in figura. Dalla stessa figura si ricavano le distanze e i valori dei carichi. Si supponga che la forza **F** formi con l'asse della trave un angolo pari a 30°.

Si ha:
$$F_x = F \cdot \cos 30 = 40 \cdot \cos 30 = 34{,}641\,KN$$
$$F_y = F \cdot sen30 = 40 \cdot sen30 = 20\,KN$$

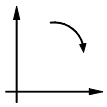


I versi sono quelli riportati in figura.

La risultante del carico sarà applicata nel baricentro dell'area di carico e quindi a 1,70 m dall'Appoggio in **A**; il valore della risultante del carico distribuito è pari a :

$$Q = q \cdot L = 20 \cdot 3{,}40 = 68\,KN$$

Tenendo conto della convenzione sui segni delle forze e dei momenti per la quale i versi positivi sono quelli riportati nella figura a fianco, si passa a scrivere le equazioni cardinali della statica per la ricerca delle reazioni vincolari nella struttura data.



$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_{(A)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{AX} - F_x = 0 \\ R_{AY} - Q - F_y + R_B = 0 \\ 1{,}70 \cdot Q + 4{,}50 \cdot F_y - 6{,}30 \cdot R_B = 0 \end{cases}$$

Nella terza equazione è stato calcolato il momento di tutte le forze intorno ad **A**.

Sostituendo ai simboli i valori delle forze esterne e risolvendo il sistema di equazioni si determinano il valore ed il verso delle reazioni vincolari.

$$\begin{cases} R_{AX} - 34{,}641 = 0 \\ R_{AY} - 68 - 20 + R_B = 0 \\ 1{,}70 \cdot 68 + 4{,}50 \cdot 20 - 6{,}30 \cdot R_B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AX} = 34{,}641 \\ R_{AY} + R_B = 68 + 20 \\ -6{,}30 \cdot R_B = -1{,}70 \cdot 68 - 4{,}50 \cdot 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AX} = 34{,}641 \\ R_{AY} + R_B = 68 + 20 \\ R_B = \dfrac{1{,}70 \cdot 68 + 4{,}50 \cdot 20}{6{,}30} = 32{,}635 \end{cases}$$

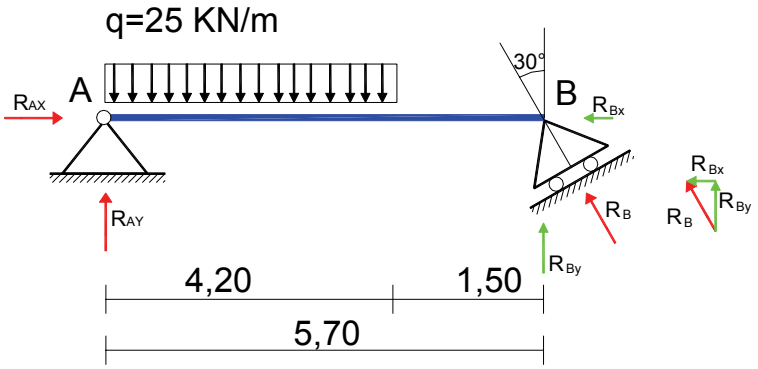
$$\begin{cases} R_{AX} = 34{,}641\,KN \\ R_{AY} = 68 + 20 - 32{,}635 = 55{,}365\,KN \\ R_B = 32{,}635\,KN \end{cases}$$

Tutti i risultati ottenuti per le reazioni vincolari sono di segno positivo, quindi i versi delle reazioni ipotizzati nell'impostazione iniziale del problema sono corretti. Il disegno, con la

rappresentazione dei versi delle forze in gioco utilizzato nell'impostazione dell'esercizio rimane valido anche per la rappresentazione dei risultati ottenuti.

2.3 - Trave semplice orizzontale con carrello inclinato

Si consideri la struttura rappresentata a fianco. E' una trave semplicemente appoggiata con il carrello inclinato di un angolo di 30° rispetto alla verticale nel punto **B**. Ipotizzati i versi (positivi) per le reazioni vincolari R_{AX}, R_{AY} e R_B, per poter procedere alla scrittura delle equazioni cardinali della statica si deve prima scomporre la reazione vincolare R_B secondo le due direzioni **x** e **y** (orizzontale e verticale) del sistema cartesiano di riferimento.



Si ha:

$$R_{BX} = R_B \cdot sen30° \quad \text{e} \quad R_{BY} = R_B \cdot \cos 30°$$

Tenendo conto della convenzione sui segni e esprimendo l'equilibrio alla rotazione con i momenti delle forze rispetto ad **A** si scrivono le seguenti condizioni di equilibrio.

$$\begin{cases} R_{AX} - R_{Bx} = 0 \\ R_{AY} - 4{,}20 \cdot q + R_{By} = 0 \\ 2{,}10 \cdot 4{,}20 \cdot q - 5{,}70 \cdot R_{By} = 0 \end{cases}$$

Note: Apparentemente il sistema di equazioni scritto presenta quattro incognite e tre equazioni, ma in effetti le incognite sono solo tre, infatti al posto delle componenti **R_{Bx}** e **R_{By}** vanno sostituite le espressioni ricavate prima in funzione della sola **R_B** che rappresenta l'effettiva terza incognita del problema.

Sostituendo alle componenti R_{BX} e R_{BY} le espressioni che le relazionano alla reazione vincolare R_B ed alle forze esterne i relativi valori si risolve il sistema di equazioni.

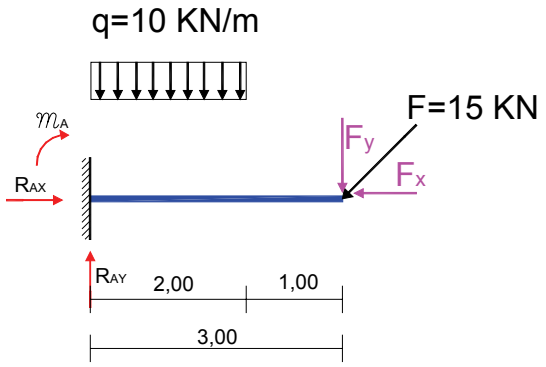
$$\begin{cases} R_{AX} - R_B \cdot sen30° = 0 \\ R_{AY} - 4{,}20 \cdot 25 + R_B \cdot \cos 30° = 0 \\ 2{,}10 \cdot 4{,}20 \cdot 25 - 5{,}70 \cdot R_B \cdot \cos 30° = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{AX} = R_B \cdot sen30° \\ R_{AY} + R_B \cdot \cos 30° = 4{,}20 \cdot 25 \\ -5{,}70 \cdot R_B \cdot \cos 30° = -2{,}10 \cdot 4{,}20 \cdot 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AX} = R_B \cdot sen30° \\ R_{AY} + R_B \cdot \cos 30° = 4{,}20 \cdot 25 \\ R_B = \dfrac{2{,}10 \cdot 4{,}20 \cdot 25}{5{,}70 \cdot \cos 30°} = 44{,}669 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{AX} = 44{,}669 \cdot sen30° = 22{,}334\,KN \\ R_{AY} = 4{,}20 \cdot 25 - 44{,}669 \cdot \cos 30° = 66{,}316\,KN \\ R_B = 44{,}669\,KN \end{cases}$$

Note:
Tutti i risultati sono positivi e pertanto i versi ipotizzati sono quelli giusti. La rappresentazione grafica dei risultati per le reazioni vincolari è la stessa utilizzata per l'impostazione delle equazioni cardinali della statica.

2.4 - La Mensola

La struttura rappresentata a fianco è solitamente conosciuta come mensola. In particolare la mensola proposta risulta caricata da una forza **F** applicata in punta ed inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo di 40°; è inoltre applicato un carico uniformemente distribuito pari a 10 KN/m che si estende dalla sezione all'incastro fino a 2,00 m da esso. La struttura è isostatica, staticamente determinata e le reazioni vincolari incognite sono quelle esplicabili dall'incastro: R_{AX}, R_{AY} e $\mathcal{M}_A$.



Per prima cosa si scompone la forza **F** nelle direzioni orizzontali e verticali ottenendo le seguenti componenti:

$$F_x = F \cdot \cos 40° = 15 \cdot \cos 40° = 11{,}491\,KN$$
$$F_y = F \cdot sen40° = 15 \cdot sen40° = 9{,}642\,KN$$

Si passa quindi a scrivere le equazioni cardinali della statica dove, nella scrittura della terza equazione, si sono valutati i momenti intorno ad **A**, punto nel quale è posto l'incastro.

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_{(A)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{AX} - F_x = 0 \\ R_{AY} - 2 \cdot q - F_y = 0 \\ \mathcal{M}_A + 2 \cdot q \cdot 1 + 3 \cdot F_y = 0 \end{cases}$$

Nota:
Nella scrittura della terza equazione si sono calcolati i momenti delle forze intorno al punto **A**, tenendo presente che nello stesso punto è applicata la coppia concentrata $\mathcal{M}_A$, reazione vincolare dell'incastro.

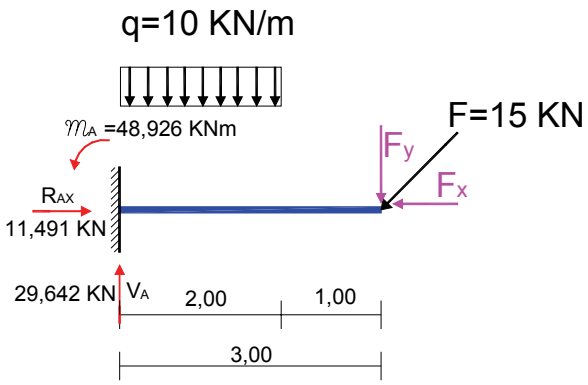
Si è tenuto conto della presenza della coppia $\mathcal{M}_A$, del momento dovuto al carico distribuito la cui risultante è pari a $Q = 2 \cdot q$ ed è posta alla distanza di 1 m dall'incastro in **A**, oltre alla componente verticale della forza $\mathbf{F}_y$ che dista 3 m da **A**.

Risolvendo il sistema di equazioni ottenuto si ricavano i valori ed i versi delle reazioni vincolari.

$$\begin{cases} R_{AX} - 11{,}491 = 0 \\ R_{AY} - 2 \cdot 10 - 9{,}642 = 0 \\ \mathcal{M}_A + 2 \cdot 10 \cdot 1 + 3 \cdot 9{,}642 = 0 \end{cases}$$

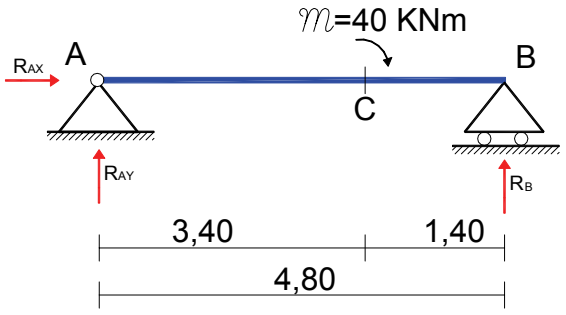
$$\begin{cases} R_{AX} = 11{,}491\,KN \\ R_{AY} = 2 \cdot 10 + 9{,}642 = 29{,}642\,KN \\ \mathcal{M}_A = -2 \cdot 10 \cdot 1 - 3 \cdot 9{,}642 = -48{,}926\,KNm \end{cases}$$

Dai risultati ottenuti si evince che mentre i versi ipotizzati per le reazioni vincolari R_{AX} e R_{AY} sono esatti, il verso relativo alla reazione vincolare $\mathcal{M}_A$ è invece contrario a quello ipotizzato. Lo schema strutturale completo dei risultatati relativi alle reazioni vincolari è quindi il seguente.



2.5 - Trave semplice caricata da una coppia concentrata

Si consideri la trave semplice riportata a lato; la trave è caricata da una coppia concentrata $\mathcal{M}$ applicata nel punto **C**. Si ipotizzano i versi positivi delle reazioni vincolari e si passa a scrivere le equazioni cardinali della statica.



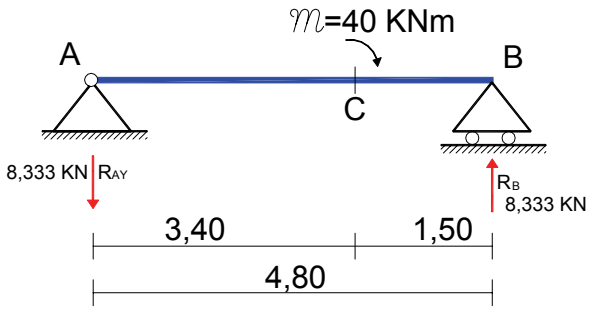
$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_{(A)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} + R_B = 0 \\ \mathcal{M} - 4{,}80 \cdot R_B = 0 \end{cases}$$

I momenti per la scrittura della terza equazione sono stati calcolati rispetto al punto **A**, e nella scrittura dell'equazione si è tenuto conto della presenza della coppia $\mathcal{M}$ e del momento di $\mathbf{R_B}$ intorno ad **A**.

Risolvendo il sistema si ricavano le reazioni vincolari cercate.

$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} + R_B = 0 \\ \mathcal{M} - 4{,}80 \cdot R_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} + R_B = 0 \\ 40 - 4{,}80 \cdot R_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} = -R_B = -8{,}333\,KN \\ R_B = \dfrac{40}{4{,}80} = 8{,}333\,KN \end{cases}$$

Dai risultati ottenuti si ricava che le reazioni vincolari R_{AY} e R_B costituiscono una coppia uguale ed opposta alla coppia esterna $\mathcal{M}$ applicata sulla trave. E' utile notare che i risultati delle reazioni vincolari sono indipendenti dalla posizione di applicazione della coppia esterna $\mathcal{M}$ e dipendono esclusivamente dal verso e dal modulo di questa e dalla distanza tra gli appoggi **A** e **B**.

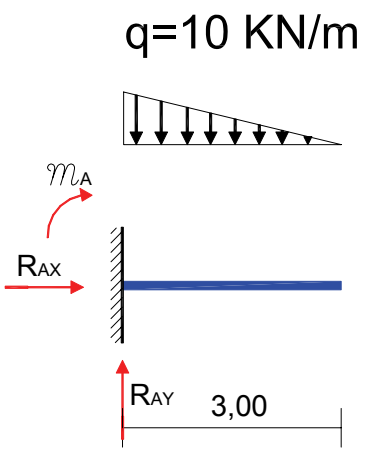


Si riporta accanto lo schema risolto con i giusti versi delle reazioni vincolari.

2.6 - Mensola soggetta a un carico distribuito di forma triangolare

E' assegnata una mensola sulla quale agisce un carico distribuito di forma triangolare.

Il valore massimo del carico **q** è pari a 10 KN/m. Un incastro può esplicare tre reazioni vincolari, le due forze R_{AX} e R_{AY} ed una coppia $\mathcal{M}_A$.



Si assumono inizialmente i versi positivi per le reazioni vincolari e si scrivono le equazioni cardinali della statica. Si ricorda che la risultante di un carico distribuito a forma triangolare è pari all'area del diagramma di carico $Q = \frac{q \cdot L}{2}$ ed è applicata ad una distanza pari a $\frac{L}{3}$ dal lato dove il carico è massimo.

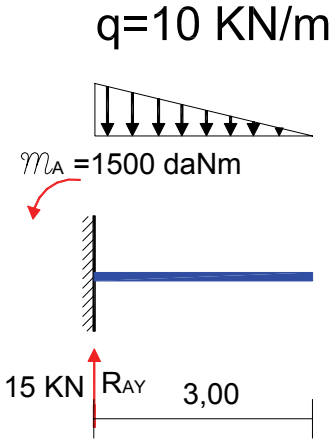
Le equazioni cardinali della statica assumono la forma che segue

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_{(A)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} - \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3 = 0 \\ \mathcal{M}_A + \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo i valori e risolvendo il sistema, si ottengono le reazioni vincolari cercate.

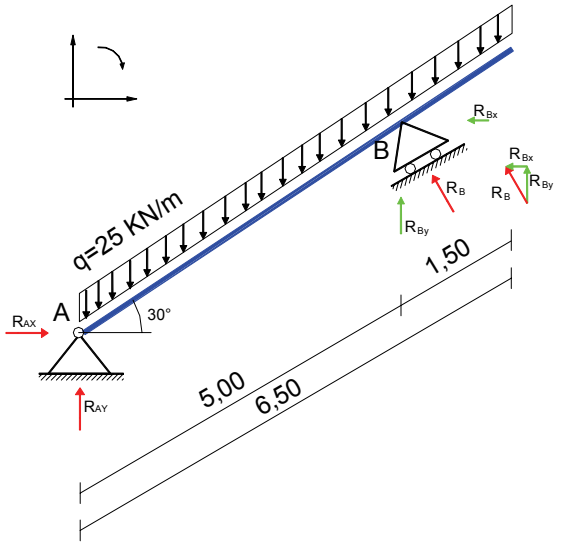
$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} - \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3 = 0 \\ \mathcal{M}_A + \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 0 \\ \mathcal{M}_A + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} = + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 15\ KN \\ \mathcal{M}_A = - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 \cdot 1 = -15\ KNm \end{cases}$$

Si riporta lo schema strutturale con la rappresentazione dei risultati ottenuti



2.7 - Trave semplice, inclinata e soggetta ad un carico uniforme verticale

Si vuole studiare la struttura qui rappresentata e verificare inoltre che la scelta del sistema di riferimento non influisce sulla soluzione del problema dell'equilibrio esterno.



Si consideri dapprima il consueto sistema di riferimento avente gli assi **X** ed **Y** rispettivamente orizzontale e verticale. Il carico si sviluppa lungo la direzione della trave ed è diretto secondo l'asse **Y** e pertanto non necessita di essere scomposto mentre per il carrello si dovrà provvedere a considerare le componenti orizzontale e verticale della Reazione R_B. Si consideri l'asse del carrello perpendicolare all'asse della trave e quindi formante un angolo di 30° rispetto alla direzione verticale. Le componenti di R_B sono:

$$\begin{aligned} R_{BY} &= R_B \cdot cos\,30° \\ R_{BX} &= R_B \cdot sen30° \end{aligned}$$

Le condizioni di equilibrio forniscono il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} R_{AX} - R_{BX} = 0 \\ R_{AY} - 6{,}50 \cdot q + R_{BY} = 0 \\ 6{,}50 \cdot q \cdot \dfrac{6{,}50 \cdot \cos 30°}{2} - R_B \cdot 5{,}00 = 0 \end{cases}$$

Nella Scrittura della 3° equazione si è considerato ai fini del momento direttamente l'incognita R_B. Se avessimo considerato i momenti delle componenti R_{BX} e R_{BY}, avremmo ottenuto il medesimo risultato del momento di R_B ma con qualche passaggio in più:

$$\begin{aligned} &- R_{BY} \cdot 5{,}00 \cdot \cos 30° - R_{BX} \cdot 5{,}00 \cdot sen30° = -(R_B \cdot 5{,}00 \cdot \cos^2 30° + R_B \cdot 5{,}00 \cdot sen^2 30°) = \\ &= -R_B \cdot 5{,}00 \cdot (\cos^2 30° + sen^2 30°) = -R_B \cdot 5{,}00 \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni di R_{BX} ed R_{BY} nel sistema si ottengono i seguenti risultati:

$$\begin{cases} R_{AX} - R_B \cdot sen30° = 0 \\ R_{AY} - 6{,}50 \cdot q + R_B \cdot \cos 30° = 0 \\ 6{,}50 \cdot q \cdot \dfrac{6{,}50 \cdot \cos 30°}{2} - R_B \cdot 5{,}00 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{AX} - R_B \cdot sen30° = 0 \\ R_{AY} - 6{,}50 \cdot 25 + R_B \cdot \cos 30° = 0 \\ 6{,}50 \cdot 25 \cdot \dfrac{6{,}50 \cdot \cos 30°}{2} - R_B \cdot 5{,}00 = 0 \end{cases}$$

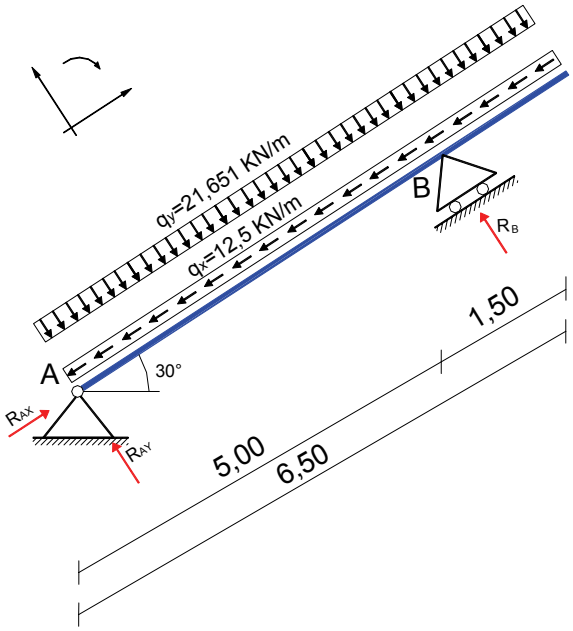
$$\begin{cases} R_{AX} = 91{,}474 \cdot sen30° = 45{,}737\,KN \\ R_{AY} = 162{,}5 - 91{,}474 \cdot \cos 30° = 83{,}281\,KN \\ R_B = \dfrac{457{,}370}{5} = 91{,}474\,KN \end{cases}$$

Proviamo ora a risolvere lo stesso esercizio adottando un sistema di riferimento che abbia l'asse **X** coincidente con l'asse della trave e l'asse **Y** perpendicolare alla trave stessa. Con tale sistema di riferimento non sarà necessario scomporre la reazione vincolare del carrello che risulterà parallela all'asse **Y** ma sarà necessario scomporre il carico distribuito **q** nelle direzioni dell'asse ottenendo un carico distribuito $\mathbf{q_y}$ che si sviluppa lungo l'asse della trave ed ha direzione perpendicolare alla trave stessa, mentre la componente del carico $\mathbf{q_x}$ si svilupperà lungo l'asse della trave ed avrà direzione parallela e coincidente con la trave stessa. Per procedere alla scomposizione del carico distribuito si opera in maniera identica a quanto si fa con le forze concentrate, basta pensare che un carico distribuito altro non è che una serie di forze tutte uguali poste una dietro l'altra e che presentano per ogni metro di carico una risultante pari a **q**. Le componenti $\mathbf{q_x}$ e $\mathbf{q_y}$ vengono calcolate nel seguente modo:

$$q_y = 25 \cdot \cos 30° = 21{,}651\,KN/m \qquad q_x = 25 \cdot sen30° = 12{,}500\,KN/m$$

Le equazioni cardinali della statica ci forniscono il seguente sistema:

$$\begin{cases} R_{AX} - 6{,}50 \cdot q_x = 0 \\ R_{AY} - 6{,}50 \cdot q_y + R_B = 0 \\ \dfrac{6{,}50^2}{2} \cdot q_y - 5{,}00 \cdot R_B = 0 \end{cases}$$



Sostituendo i valori di $\mathbf{q_x}$ e $\mathbf{q_y}$ ricavati prima si ottengono le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} R_{AX} - 6{,}50 \cdot 12{,}500 = 0 \\ R_{AY} - 6{,}50 \cdot 21{,}651 + R_B = 0 \\ \dfrac{6{,}50^2}{2} \cdot 21{,}651 - 5{,}00 \cdot R_B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AX} = 6{,}50 \cdot 12{,}500 = 81{,}250\,KN \\ R_{AY} = +6{,}50 \cdot 21{,}651 - 91{,}475 = 49{,}256\,KN \\ R_B = \dfrac{457{,}377}{5{,}00} = 91{,}475\,KN \end{cases}$$

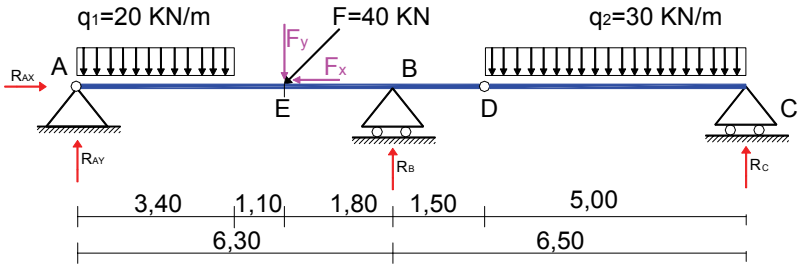
Come si può vedere il risultato di R_B è praticamente identico, a meno degli arrotondamenti effettuati nei calcoli, a quello ottenuto con il sistema di riferimento precedente. I risultati di R_{AX} e R_{AY} non sono direttamente confrontabili per la diversa di queste reazioni vincolari rispetto allo schema precedente, ma il confronto può essere effettuato la risultante R_A che si ottiene con i due diversi sistemi cartesiani di riferimento.

Nel primo caso si ha: $R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2} = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2} = \sqrt{45{,}737^2 + 83{,}281^2} = 95{,}014\,KN$

Nel secondo caso si ha: $R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2} = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2} = \sqrt{81{,}250^2 + 49{,}256^2} = 95{,}014\,KN$

Come era da aspettarsi, i risultati ottenuti con i due diversi sistemi di riferimento sono perfettamente equivalenti

2.7 - Le Travi Gerber



Le travi gerber sono travi continue isostatiche e sono costituite da più tratti di trave collegati tra di loro mediante delle cerniere interne. Per queste travi le sole equazioni cardinali della statica non sono sufficienti per la soluzione del problema e pertanto a queste vanno aggiunte equazioni che esprimano le condizioni di equilibrio delle cerniere interne. Tali equazioni da aggiungere sono in numero pari al numero di cerniere interne presenti nella trave e prendono il nome di **equazioni ausiliarie**. Considerando la struttura riportata in figura si può facilmente verificare che la struttura è isostatica e che le reazioni vincolari incognite sono in numero di 4. Le equazioni cardinali della statica sono in numero di 3 e quindi insufficienti per la soluzione del problema. La quarta equazione necessaria per la soluzione del problema è appunto l'equazione ausiliaria che si esplicita attraverso la seguente considerazione. Dal punto di vista cinematico, la cerniera interna consentirebbe la rotazione relativa tra i due tratti di trave collegati ma, essendo la struttura isostatica, tale rotazione non può avvenire. Dal punto di vista delle forze, affinché la rotazione relativa tra i due tratti, seppur consentita dalla cerniera interna, non si verifichi, il momento delle forze a destra o a sinistra della cerniera, rispetto alla stessa cerniera, deve essere nullo. Infatti, se per ipotesi considerassimo il tratto di sinistra fisso, il tratto di trave a destra della cerniera deve essere sollecitato da un sistema di forze che risulta in equilibrio rotazionale intorno alla cerniera. Considerando quindi fisso il tratto di sinistra, il momento di tutte le forze che sono applicate sul tratto di trave alla destra della cerniera, calcolato rispetto alla cerniera stessa deve essere nullo. Ovviamente se si considera fisso il tratto di destra anche il

momento delle forze agenti sul tratto di sinistra, calcolato rispetto alla cerniera, deve essere nullo. La condizione di equilibrio appena espressa costituisce proprio **l'equazione ausiliaria** che, aggiunta alle equazioni cardinali della statica, consente la scrittura del sistema di equazioni di equilibrio, la cui soluzione ci fornisce le reazioni vincolari. La scelta se scrivere l'equazione ausiliaria considerando le forze che seguono o viceversa le forze che precedono, è del tutto arbitraria.

Tornado alla trave rappresentata passiamo a scrivere le equazioni cardinali della statica e l'equazione ausiliaria considerando che la forza F forma con l'asse della trave un angolo di 45°.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{(A)} = 0 \\ eq.aus.M_D = 0 \end{cases} \begin{cases} R_{AX} - F_x = 0 \\ R_{AY} - 3{,}40 \cdot q_1 - F_y + R_B - 5{,}00 \cdot q_2 + R_C = 0 \\ \dfrac{3{,}40^2}{2} \cdot q_1 + F_y \cdot 4{,}50 - R_B \cdot 6{,}30 + 5{,}00 \cdot q_2 \cdot 10{,}30 - R_C \cdot 12{,}80 = 0 \\ \dfrac{5{,}00^2}{2} \cdot q_2 - R_C \cdot 5{,}00 = 0 \end{cases}$$

Per la scrittura dell'equazione ausiliaria si è preferito considerare il momento delle forze a destra della cerniera così che nell'equazione compaia solo l'incognita R_C. In alternativa se avessimo scritto l'equazione ausiliaria considerando il momento di tutte le forze che precedono la cerniera, l'equazione avrebbe contenuto le reazioni vincolari incognite R_{AY} e R_B, complicando leggermente il problema algebrico.

Considerando che: $F_x = 40 \cdot \cos 45° = 28{,}284\,KN$, $F_y = 40 \cdot sen45° = 28{,}284\,KN$ e risolvendo il sistema si ottengono i seguenti risultati:

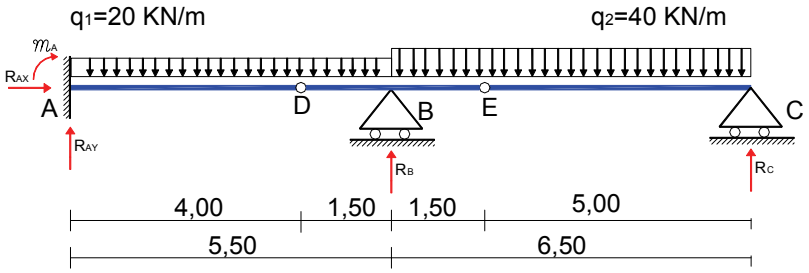
$$\begin{cases} R_{AX} - 28{,}284 = 0 \\ R_{AY} - 3{,}40 \cdot 20 - 28{,}284 + R_B - 5{,}00 \cdot 30 + R_C = 0 \\ \dfrac{3{,}40^2}{2} \cdot 20 + 28{,}284 \cdot 4{,}50 - R_B \cdot 6{,}30 + 5{,}00 \cdot 30 \cdot 10{,}30 - R_C \cdot 12{,}80 = 0 \\ \dfrac{5{,}00^2}{2} \cdot 30 - R_C \cdot 5{,}00 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AX} = 28{,}284\,KN \\ V_A = 3{,}40 \cdot 20 + 28{,}284 - 131{,}409 + 5{,}00 \cdot 30 - 75 = 39{,}875\,KN \\ R_B = \dfrac{-75 \cdot 12{,}80 + 5{,}00 \cdot 30 \cdot 10{,}30 + \dfrac{3{,}40^2}{2} \cdot 20 + 28{,}284 \cdot 4{,}50}{6{,}30} = 131{,}409\,KN \\ R_C = \dfrac{\dfrac{5{,}00^2}{2} \cdot 30}{5{,}00} = 75\,KN \end{cases}$$

I risultati sono tutti positivi e quindi i versi delle reazioni vincolari sono quelli ipotizzati.

2.7.1 - Trave Gerber con due cerniere interne

Si consideri la trave rappresentata in figura. E' una trave Gerber costituita da tre tratti di trave collegati tra di loro da due cerniere interne. Il bilancio dei gradi di libertà ci fornisce i seguenti valori:



$$3 \cdot t - s = 9 - (3 + 2 + 1 + 2 + 1) = 9 - 9 = 0$$

La struttura non presenta labilità. Infatti, analizzando il comportamento cinematico della struttura, partendo dal tratto sinistro, la presenza dell'incastro determina che il punto **D** dove è posta la prima cerniera interna è fisso; il secondo tratto, essendo la cerniera in **D** fissa potrebbe solo ruotare intorno a **D** ma tale rotazione è impedita dal carrello in **B** e pertanto anche il punto **E** dove è posta la seconda cerniera interna è fisso; l'ultimo tratto, ragionando in maniera analoga, potrebbe ruotare intorno ad **E** ma tale rotazione è impedita dal carrello in **C**. In conclusione può affermarsi che oltre ad essere $3t - s = 0$ è anche $l = 0$ e $i = 0$, quindi la struttura è isostatica.

Le reazioni vincolari incognite sono: R_{AX}, R_{AY}, $\mathcal{M}_A$, R_B e R_C

Scriviamo le equazioni di equilibrio esterno per la soluzione della struttura.

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_{(A)} = 0 \\ M_D = 0 \\ M_E = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} - 5{,}50 \cdot q_1 + R_B - 6{,}50 \cdot q_2 + R_C = 0 \\ \mathcal{M}_A + \dfrac{5{,}50^2}{2} \cdot q_1 - 5{,}50 \cdot R_B + 6{,}50 \cdot q_2 \cdot \left(5{,}50 + \dfrac{6{,}50}{2}\right) - 12{,}00 \cdot R_C = 0 \\ \dfrac{1{,}50^2}{2} \cdot q_1 - 1{,}50 \cdot R_B + 6{,}50 \cdot q_2 \cdot \left(1{,}50 + \dfrac{6{,}50}{2}\right) - 8{,}00 \cdot R_C = 0 \\ \dfrac{5{,}00^2}{2} \cdot q_2 - 5{,}00 \cdot R_C = 0 \end{cases}$$

Le ultime due equazioni sono le equazioni ausiliarie che esprimono le condizioni di equilibrio della cerniera in **D** e nella cerniera in **E**. Entrambe le equazioni impongono che il momento di tutte le forze che seguono la cerniera in esame, calcolato rispetto alla cerniera stessa sia nullo.

Sostituendo il valore dei carichi e risolvendo il sistema si perviene alle reazioni vincolari che determinano l'equilibrio esterno della struttura.

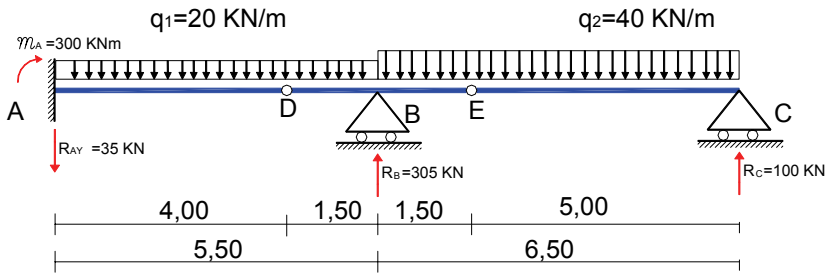
$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ \\ R_{AY} - 5{,}50 \cdot 20 + R_B - 6{,}50 \cdot 40 + R_C = 0 \\ \mathcal{M}_A + \dfrac{5{,}50^2}{2} \cdot 20 - 5{,}50 \cdot R_B + 6{,}50 \cdot 40 \cdot 8{,}75 - 12{,}00 \cdot R_C = 0 \\ \dfrac{1{,}50^2}{2} \cdot 20 - 1{,}50 \cdot R_B + 6{,}50 \cdot 40 \cdot 4{,}75 - 8{,}00 \cdot R_C = 0 \\ \dfrac{5{,}00^2}{2} \cdot 40 - 5{,}00 \cdot R_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} - 370 + R_B + R_C = 0 \\ \mathcal{M}_A + 2577{,}5 - 5{,}50 \cdot R_B - 12{,}00 \cdot R_C = 0 \\ 1257{,}5 - 1{,}50 \cdot R_B - 8{,}00 \cdot R_C = 0 \\ 500 - 5{,}00 \cdot R_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} - 370 + R_B + 100 = 0 \\ \mathcal{M}_A + 2577{,}5 - 5{,}50 \cdot R_B - 12{,}00 \cdot 100 = 0 \\ -1{,}50 \cdot R_B = 8{,}00 \cdot 100 - 1257{,}5 \\ R_C = \dfrac{500}{5{,}00} = 100 \ KN \end{cases}$$

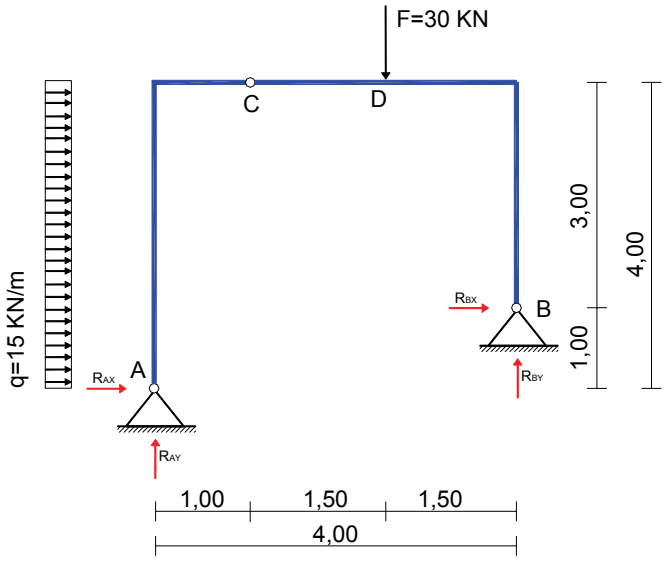
$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} = 370 - 100 - 305 = -35 \\ \mathcal{M}_A = -2577{,}5 + 1200 + 5{,}50 \cdot 305 = 300 \, KNm \\ R_B = \dfrac{1257{,}5 - 8{,}00 \cdot 100}{1{,}50} = 305 \, KN \\ R_C = 100 \, KN \end{cases}$$

Nella figura sotto è rappresentata la struttura studiata con la rappresentazione dei risultati ottenuti.



2.8 - I Portali

I portali sono strutture costituite da due piedritti (colonne) sormontate da un architrave. A seconda delle diverse configurazioni possibili i portali possono essere isostatici o iperstatici. Nella figura a lato è rappresentato un portale costituito da due tratti vincolati esternamente con due cerniere ed internamente con una terza cerniera. La struttura rientra nella tipologia dei cosiddetti archi a tre cerniere; essi sono strutture isostatiche a patto che le tre cerniere non siano allineate. La soluzione della struttura proposta viene condotta in analogia con le modalità di soluzione delle travi Gerber; si scrivono le equazioni cardinali della statica integrandole con l'equazione ausiliaria di equilibrio della cerniera interna. In questo caso scriveremo l'equazione ausiliaria valutando il momento rispetto a **C** di tutte le forze che seguono la cerniera interna.



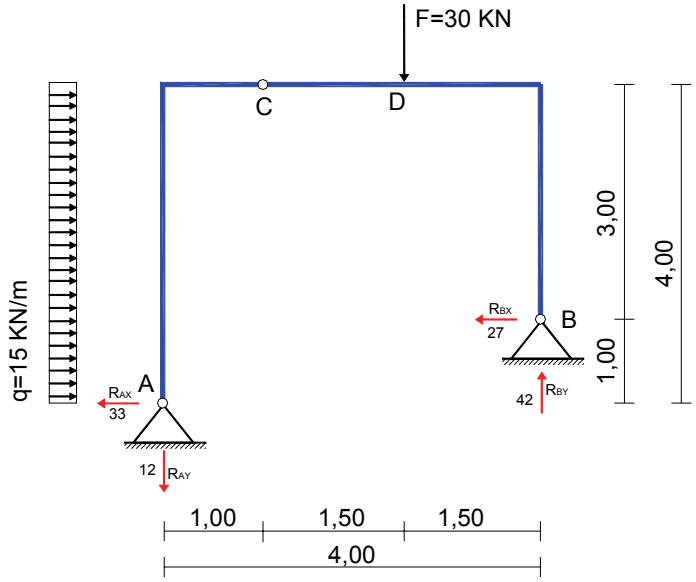
$$\begin{cases} R_{AX} + 4{,}00 \cdot q + R_{BX} = 0 \\ R_{AY} - F + R_{BY} = 0 \\ \dfrac{4{,}00^2}{2} \cdot q + 2{,}50 \cdot F + 1{,}00 \cdot R_{BX} - 4{,}00 \cdot R_{BY} = 0 \\ 1{,}50 \cdot F - 3{,}00 \cdot R_{BX} - 3{,}00 \cdot R_{BY} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AX} + 4{,}00 \cdot 15 + R_{BX} = 0 \\ R_{AY} - 30 + R_{BY} = 0 \\ \dfrac{4{,}00^2}{2} \cdot 15 + 2{,}50 \cdot 30 + 1{,}00 \cdot R_{BX} - 4{,}00 \cdot R_{BY} = 0 \\ 1{,}50 \cdot 30 - 3{,}00 \cdot R_{BX} - 3{,}00 \cdot R_{BY} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{AX} + 60 + R_{BX} = 0 \\ R_{AY} - 30 + R_{BY} = 0 \\ 195 + 1{,}00 \cdot R_{BX} - 4{,}00 \cdot R_{BY} = 0 \\ 45 - 3{,}00 \cdot R_{BX} - 3{,}00 \cdot R_{BY} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AX} + 60 + R_{BX} = 0 \\ R_{AY} - 30 + R_{BY} = 0 \\ 195 + 15 - R_{BY} - 4{,}00 \cdot R_{BY} = 0 \\ R_{BX} = \dfrac{45 - 3{,}00 \cdot R_{BY}}{3{,}00} = 15 - R_{BY} \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{AX} + 60 + R_{BX} = 0 \\ R_{AY} - 30 + R_{BY} = 0 \\ R_{BY} = \dfrac{210}{5} = 42 \\ R_{BX} = 15 - R_{BY} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AX} = -60 + 27 = -33 \\ R_{AY} = 30 - 42 = -12 \\ R_{BY} = 42 \\ R_{BX} = 15 - 42 = -27 \end{cases}$$

Sotto si riporta la figura rappresentante le reazioni vincolari con i versi coerenti con i risultati ottenuti.



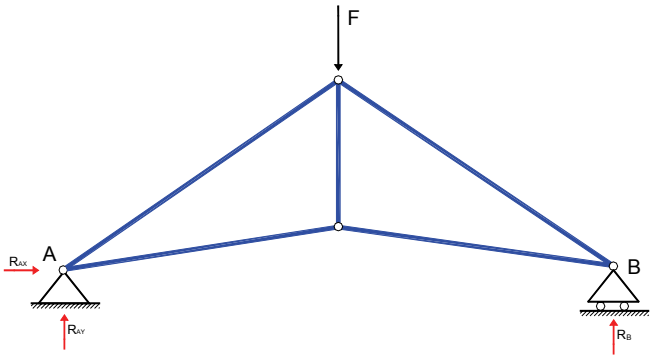
2.9 - Le strutture reticolari

Le strutture reticolari sono tipiche strutture isostatiche composte da diversi tratti di trave collegati tra loro da cerniere in modo da formare un certo numero di maglie triangolari. Esternamente sono solitamente vincolate attraverso una cerniera ed un carrello alla stregua di una semplice trave appoggiata. Esaminando una singola maglia triangolare si può osservare come tra i tre tratti che costituiscono la maglia non sono possibili spostamenti o rotazioni relative, pertanto la maglia si comporta come se fosse un singolo corpo rigido avente quindi tre gradi di libertà esterni. L'assemblaggio di un certo numero di maglie triangolari comporta che l'intera struttura, può assumersi ai fini dell'equilibrio esterno come un singolo corpo rigido (come una trave semplice costituita da un unico tratto) e pertanto i tre gradi di libertà esterni dell'intera struttura possono essere soppressi da una cerniera ed un carrello. Per la determinazione delle reazioni vincolari è sufficiente la scrittura delle tre equazioni cardinali della statica.

Nelle strutture reticolari i carichi sono generalmente costituiti da forze concentrate applicate nei nodi strutturali.

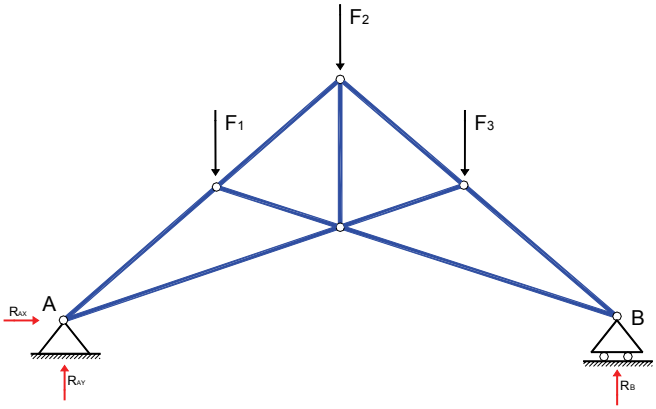
Assemblando in maniera diversa le singole maglie triangolari si possono costruire diverse tipologie di travature reticolari ed alcune di queste, con particolari configurazioni, si prestano a particolari utilizzi ed assumono nomi specifici.

Vengono qui proposte in rassegna alcuni degli schemi di travature reticolari più usuali con le possibili configurazioni di carico. Resta a cura del lettore esercitarsi nel riconoscere l'isostaticità della struttura proposta e la formulazione di esercizi numerici per la ricerca delle reazioni vincolari.



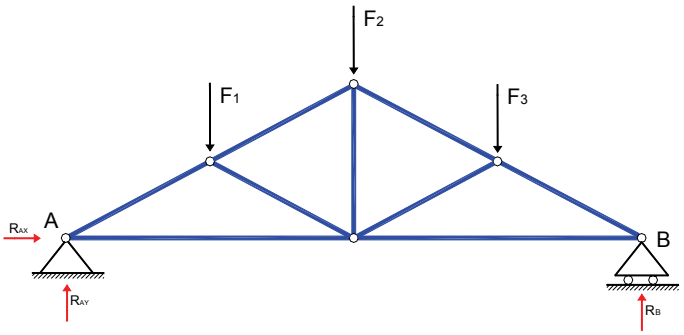
Travatura a capriata semplice con monaco.

Struttura adatta per la realizzazione di coperture a falda.



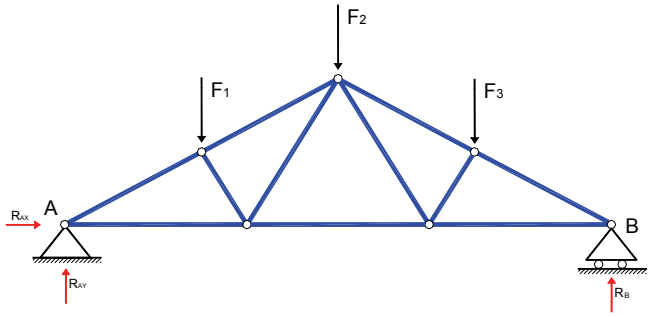
Travatura a capriata Tedesca con saettoni.

Struttura adatta per la realizzazione di coperture a falda.



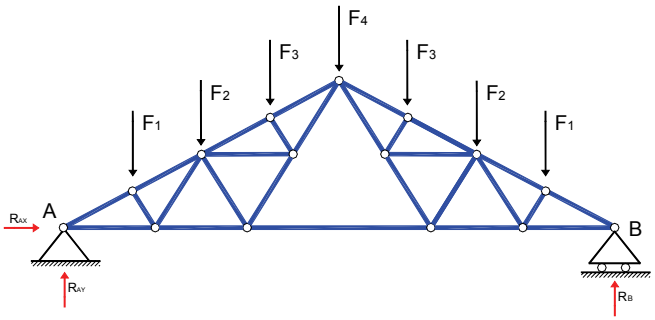
Travatura a capriata Tedesca con saettoni.

Struttura adatta per la realizzazione di coperture a falda.



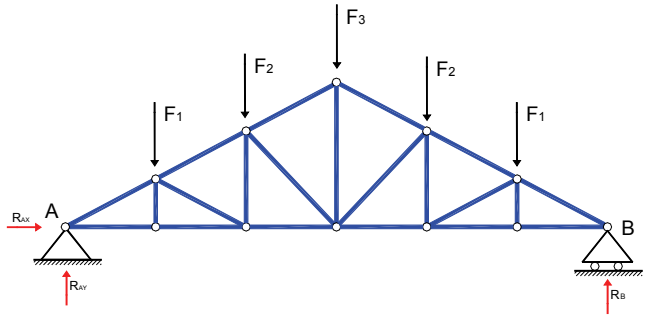
Travatura a capriata semplice tipo Polonceau

Struttura adatta per la realizzazione di coperture a falda.



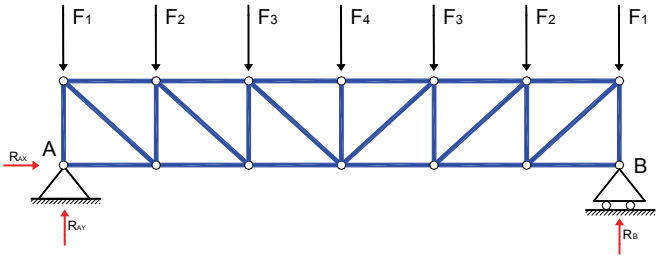
Travatura a capriata composta tipo Polonceau

Struttura adatta per la realizzazione di coperture a falda.



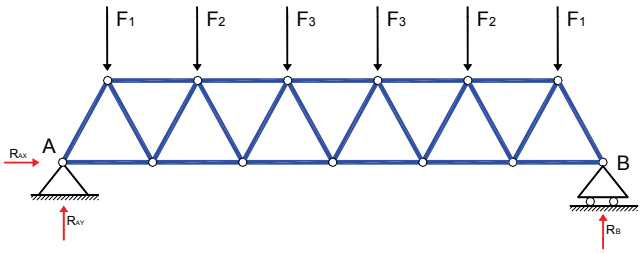
Travatura a capriata tipo Inglese

Struttura adatta per la realizzazione di coperture a falda.



Travatura reticolare tipo Mohniè

Struttura adatta per la realizzazione di coperture piane.



Travatura reticolare a correnti paralleli

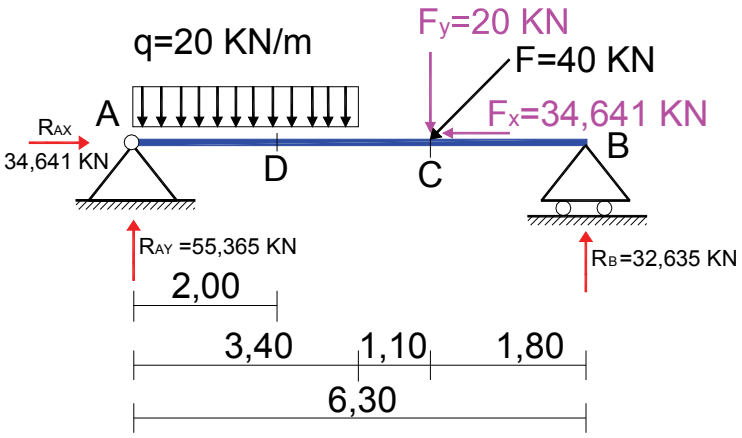
Struttura adatta per la realizzazione di coperture piane.

3 – L'equilibrio interno

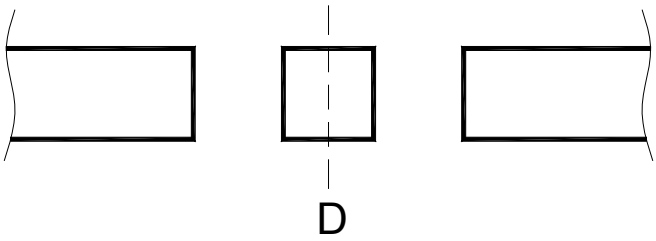
Nella trattazione del problema dell'equilibrio esterno, si è tenuto conto solo del sistema di forze che sollecita la struttura e dei vincoli esterni ed interni. In base alle caratteristiche statiche e cinematiche dei vincoli sono state dedotte le condizioni analitiche dell'equilibrio e quindi ricavato modulo e verso delle reazioni vincolari. In tutto questo processo, a cui è stato attribuito il nome di "problema dell'equilibrio interno", non ci si è minimamente occupati di ciò che accade dal punto di vista statico nelle singole sezioni che costituiscono la trave.

Proprio di questo ci andiamo ora ad occupare affrontando ciò che in questo corso definiremo "**problema dell'equilibrio interno**".

Si consideri la trave rappresentata in figura per la quale è stato già risolto il problema dell'equilibrio esterno. Sono note tutte le forze esterne agenti sulla trave e le reazioni vincolari R_{AX}, R_{AY} e R_B.



L'equilibrio esterno è rispettato e la struttura nella sua interezza sotto l'azione delle forze esterne e delle reazioni vincolari risulta stabile e non compie alcuno spostamento rigido. Si consideri ora una qualunque sezione della trave, per esempio la sezione che dista 2,00 m dall'estremo **A** della trave e che in figura è individuata con la lettera **D**. Anche tale sezione, come l'intera trave, non subendo alcuno spostamento rigido, deve trovarsi in una condizione di equilibrio e cioè, sulla sezione **D** deve agire un sistema di forze equilibrato. Immaginando di effettuare due tagli molto vicini tra loro nella trave in modo da isolare la sezione **D** (in figura è rappresentato appunto una porzione di trave nell'intorno della sezione **D** la quale deve intendersi con uno sviluppo longitudinale nel senso della trave di lunghezza infinitesimale [prossimo a zero]), si deve concludere che l'elemento di trave costituente la sezione deve essere soggetto sulle due facce opposte a due sistemi di forze con uguale intensità e versi opposti. Il sistema di forze che agirà sulla faccia sinistra sarà costituito dalla risultante di tutte le forze che sono applicate sul tratto di trave a



sinistra della sezione, mentre sulla faccia destra, agirà la risultante di tutte le forze applicate sul tratto di trave a destra della sezione. Tali risultanti possono essere scomposte in tre componenti e cioè in due forze, una parallela all'asse della trave ed una perpendicolare all'asse, entrambe applicate nel baricentro della sezione e in una coppia che costituisce il momento di trasporto per portare la risultante sul baricentro della sezione. Indicando con le lettere **N** e **V** le componenti della risultante dei sistemi di forze suddetti agenti rispettivamente lungo la direzione dell'asse della trave e lungo la direzione ortogonale all'asse, e con la lettera **M** il momento delle forze valutato intorno alla sezione **D**, si ottengono i seguenti sistemi di forze sollecitanti la sezione **D**

Sistema di forze agenti sulla faccia sinistra di D

La componente **N** è la risultante di tutte le forze e componenti di forze parallele all'asse della trave applicate sul tratto di trave a sinistra di **D**.

$$N = H_A = 34{,}641\,KN$$

La componente **V** è la risultante di tutte le forze e le componenti di forze perpendicolari all'asse della trave applicate sul tratto di trave a sinistra di **D**.

$$V = R_{AY} - 2{,}00 \cdot q = 55{,}365 - 2{,}00 \cdot 20 = 15{,}365\,KN$$

Il momento **M** è il momento risultante rispetto a **D** di tutte le forze applicate sul tratto di trave a sinistra di **D**.

$$M = 2{,}00 \cdot R_{AY} - 2{,}00 \cdot q = 2{,}00 \cdot 55{,}365 - 2{,}00 \cdot 20 = 70{,}730\,KNm$$

Sistema di forze agenti sulla faccia destra di D

La componente **N** è la risultante di tutte le forze e le componenti di forze parallele all'asse della trave, applicate sul tratto di trave a destra di **D**.

$$N = -F_X = -34{,}641\,KN$$

La componente **V** è la risultante di tutte le forze e le componenti di forze perpendicolari all'asse della trave, applicate sul tratto di trave a destra di **D**.

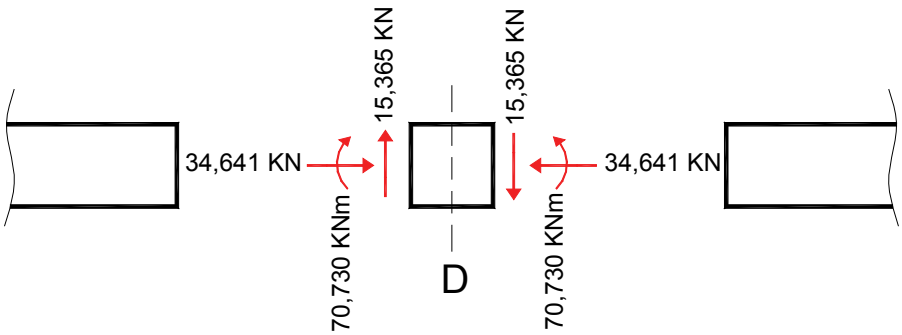
$$V = -1{,}40 \cdot q - F_Y + R_B = -1{,}40 \cdot 20 - 20 + 32{,}635 = -15{,}365\,KN$$

Il momento **M** si ottiene calcolando il momento risultante rispetto a **D** di tutte le forze applicate sul tratto di trave a destra di **D**.

$$M = \frac{1{,}40^2}{2} \cdot q + 2{,}50 \cdot F_Y - 4{,}30 \cdot R_B =$$

$$M = \frac{1{,}40^2}{2} \cdot 20 + 2{,}50 \cdot 20 - 4{,}30 \cdot 32{,}635 = -70{,}730\,KNm$$

Nella figura che segue è rappresentato l'elemento di trave costituente la sezione **D** e le componenti risultanti dei sistemi di forze agenti sulle due facce della sezione. Come si può notare, la sezione risulta in equilibrio, sulle due facce, infatti, agiscono due sistemi di forze aventi eguali intensità ma versi opposti.

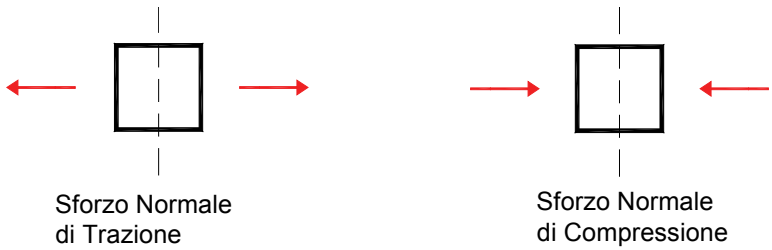


3.1 - Le caratteristiche della sollecitazione

Come si è visto nel paragrafo precedente, nelle strutture costituite da travi, sussiste una condizione di equilibrio interno per la quale ogni sezione è soggetta sulle due facce a due sistemi di forze di uguale intensità ma con verso opposto. Sono proprio questi sistemi di forze che sollecitano le sezioni che dovranno essere presi in considerazione per determinare le condizioni di resistenza delle sezioni costituenti la trave e vanno sotto il nome di **Caratteristiche della sollecitazione**. Avendo ormai accertato che sulle due facce di una sezione le forze saranno di verso opposto ma di uguale intensità va intesa come caratteristica della sollecitazione l'azione congiunta delle forze che si corrispondono sulle due facce opposte della sezione e si provvede pertanto a definire un sistema di riferimento specifico e adeguato a descrivere analiticamente i versi e le intensità delle sollecitazioni.

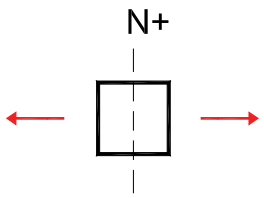
Lo sforzo Normale

La sollecitazione che agisce lungo l'asse della trave viene detto **sforzo Normale,** si indica con la lettera **N** ed è quella sollecitazione che tende a determinare un allungamento o un accorciamento del tratto di trave considerato. Facendo riferimento all'elemento che costituisce la sezione si possono avere per i versi delle forze le due condizioni rappresentate in figura:



Quando la sollecitazione tende a determinare un allungamento nella direzione della trave si dice che la sezione è soggetta a **sforzo Normale di Trazione**, mentre nel caso in cui la sollecitazione tende a determinare un accorciamento si parla di **sforzo Normale di compressione**. Ai fini del sistema di riferimento algebrico si definisce positivo lo sforzo Normale di trazione, pertanto lo sforzo normale è da considerarsi positivo quando le forze sulle due facce della sezione hanno i

versi coerenti con lo schema riportato a lato (le forze hanno verso uscente dalla sezione).



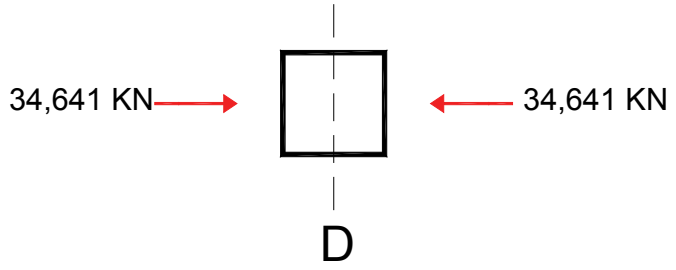
Come esempio applicativo si riconsideri la sezione **D** dell'esercizio precedente e si determini il valore dello sforzo Normale considerando tutte le forze a sinistra della sezione **D**. Dallo schema rappresentante la convenzione dei segni per lo sforzo Normale si ricava che le forze a sinistra di **D** vanno considerate positive quando tendono ad uscire dalla sezione (quando sono dirette verso sinistra). Nel caso della sezione **D** l'espressione algebrica che fornisce lo sforzo Normale è la seguente:

$$N = -R_{AX} = -34{,}641\,KN$$

Il risultato è negativo quindi nella sezione **D** agisce uno sforzo Normale di compressione.

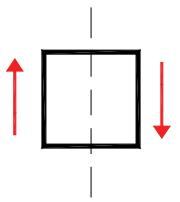
Se avessimo scelto di determinare lo sforzo Normale nella sezione considerando tutte le forze a destra della sezione, in accordo con la convenzione dei segni adottata, avremmo dovuto considerare positive le dirette verso destra, ottenendo ovviamente lo stesso risultato algebrico ottenuto prima:

$$N = -F_X = -34{,}641\,KN$$

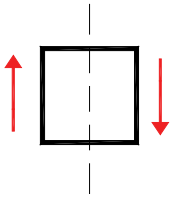


Il Taglio

La sollecitazione che agisce nella direzione ortogonale all'asse della trave si definisce **Taglio**, si indica con la lettera **V** ed è quella sollecitazione che tende a determinare uno scorrimento tra le due facce opposte di una sezione. Per convenzione il Taglio si considera positivo quando sull'elemento considerato si ha che la faccia di sinistra tende a scorrere verso l'alto e la faccia di destra verso il basso. Osservando la figura si può in maniera semplice dire che il Taglio è positivo quando la forza applicata sulla faccia sinistra è diretto verso l'alto e la forze applicata sulla faccia destra è diretta verso il basso.

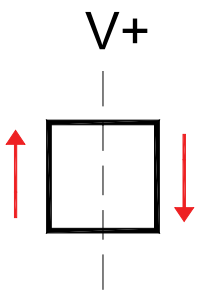


Sforzo di Taglio positivo



Sforzo di Taglio negativo

Riconsiderando l'esercizio precedente e volendo determinare lo sforzo di Taglio nella sezione **D** della trave, si effettua la somma algebrica di tutte le forze a sinistra della sezione, assegnando il segno positivo a quelle forze che sono dirette verso l'alto coerentemente con lo schema che rappresenta la convenzione algebrica per il Taglio.

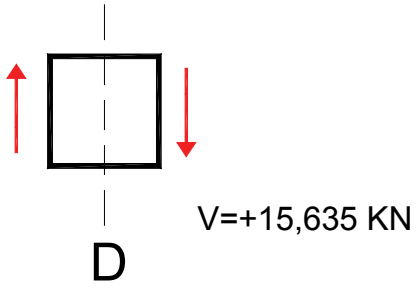


$$V = +R_{AY} - 2{,}00 \cdot q = +55{,}365 - 2{,}00 \cdot 20 = +15{,}365\,KN$$

Se avessimo deciso di determinare lo sforzo di Taglio nella sezione prendendo in considerazione tutte le forze a destra della sezione, avremmo dovuto attribuire il segno positivo a quelle forze dirette verso il basso e segno negativo alle forze dirette verso l'alto.

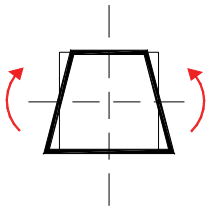
$$V = +1{,}40 \cdot q + F_Y - R_B = +1{,}40 \cdot 20 + 20 - 32{,}635 = +15{,}365\,KN$$

Ovviamente il risultato algebrico che si ottiene è lo stesso. La sezione è sollecitata da uno sforzo di Taglio positivo che vale 15,365 KN.



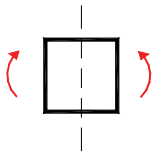
Il Momento Flettente

La sollecitazione costituita dalle coppie applicate alle due facce dell'elemento di trave costituente la sezione, viene definita **Momento Flettente** e si indica con la lettera **M**. L'azione del **Momento Flettente** tende ad imprimere alla sezione una rotazione delle due facce intorno all'asse baricentrico della sezione. Rappresentando in modo macroscopico quando descritto, l'effetto del momento e quello in figura.



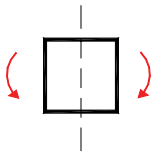
Con i versi delle coppie rappresentate in figura abbiamo che il momento applicato sulla sezione induce un allungamento delle fibre inferiori all'asse baricentrico della trave ed un accorciamento delle fibre superiori. Ovviamente nel caso in cui le coppie presentino verso opposto anche l'effetto sarà opposto provocando un allungamento delle fibre superiori ed un accorciamento delle fibre inferiori. Sono di seguito rappresentati i due versi possibili per il **Momento Flettente**. Ai fini della convenzione algebrica si considererà positivo il **Momento Flettente che tende le**

fibre inferiori.



Momento Flettente positivo

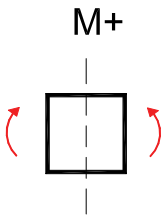
Fibre tese inferiori



Momento Flettente negativo

Fibre tese superiori

Riprendendo anche in questo caso l'esercizio svolto in precedenza, si determina il Momento Flettente nella sezione in **D** calcolando il momento rispetto a **D** di tutte le forze che precedono la sezione. Tenendo presente lo schema per la convenzione dei segni algebrici del momento flettente, considerando le forze a sinistra della sezione, si assumerà positivo il momento delle forze se orario.

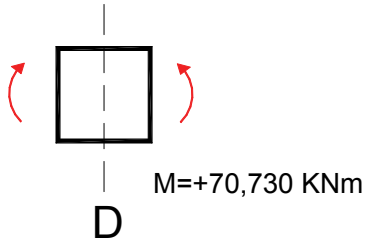


$$M = +2{,}00 \cdot R_{AY} - 2{,}00 \cdot q =$$
$$M = +2{,}00 \cdot 55{,}365 - 2{,}00 \cdot 20 = +70{,}730\, KNm$$

Se avessimo scelto di determinare il Momento Flettente nella sezione **D** considerando tutte le forze che seguono la sezione, avremmo ottenuto ovviamente lo stesso risultato algebrico avendo avuto però cura, di assegnare il segno positivo ai momenti con verso antiorario.

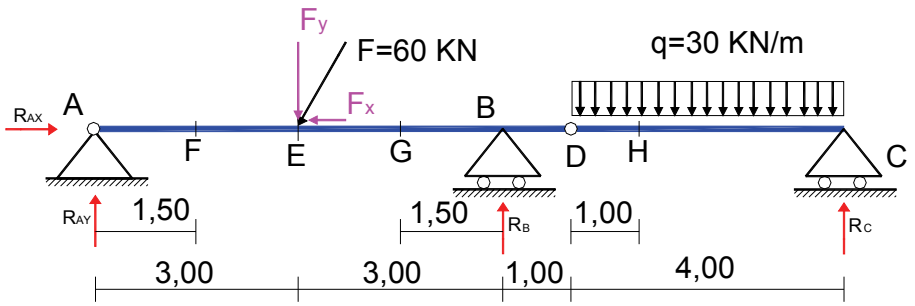
$$M = -\frac{1{,}40^2}{2} \cdot q - 2{,}50 \cdot F_Y + 4{,}30 \cdot R_B =$$
$$M = -\frac{1{,}40^2}{2} \cdot 20 - 2{,}50 \cdot 20 + 4{,}30 \cdot 32{,}635 = +70{,}730\, KNm$$

La sezione **D** è sollecitata da un **Momento Flettente positivo** pari a **M=+70,730 KNm** (le fibre tese sono quelle inferiori).



3.1.1 – Esempi Applicativi

1) **Data la struttura rappresentata in figura, nella quale la forza F forma con l'asse della trave un angolo di 60°, si determinino le caratteristiche della sollecitazione nelle sezioni F, G e H.**



Si determinano le componenti $\mathbf{F_X}$ e $\mathbf{F_Y}$ della forza **F**.

$$F_x = F \cdot \cos 60° = 60 \cdot \cos 60° = 30\,KN$$

$$F_y = F \cdot sen60° = 60 \cdot sen60° = 51{,}962\,KN$$

Determiniamo le reazioni vincolari impostando il sistema di equazioni di equilibrio costituito dalle tre equazioni cardinali della statica e dall'equazione ausiliaria relativa alla cerniera in **D**. Nella equazione che esprime l'equilibrio alla rotazione sono stati valutati i momenti delle forze intorno al punto **A**, mentre per la scrittura dell'equazione ausiliaria si è considerato l'equilibrio alla rotazione del tratto che segue la cerniera **D**.

$$\begin{cases} R_{AX} - F_x = 0 \\ R_{AY} - F_y + R_B - 4 \cdot q + R_C = 0 \\ 3 \cdot F_y - 6 \cdot R_B + 9 \cdot 4 \cdot q - 11 \cdot R_C = 0 \\ \dfrac{4^2 \cdot q}{2} - 4 \cdot R_C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} R_{AX} - 30 = 0 \\ R_{AY} - 51{,}962 + R_B - 4 \cdot 30 + R_C = 0 \\ 3 \cdot 51{,}962 - 6 \cdot R_B + 9 \cdot 4 \cdot 30 - 11 \cdot R_C = 0 \\ \dfrac{4^2 \cdot 30}{2} - 4 \cdot R_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AX} = 30\,KN \\ R_{AY} - 51{,}962 + R_B - 4 \cdot 30 + 60 = 0 \\ 3 \cdot 51{,}962 - 6 \cdot R_B + 9 \cdot 4 \cdot 30 - 11 \cdot 60 = 0 \\ R_C = \dfrac{4^2 \cdot 30}{2 \cdot 4} = 60\,KN \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AX} = 30\,KN \\ R_{AY} = +51{,}962 - 95{,}981 + 4 \cdot 30 - 60 = 15{,}981\,KN \\ R_B = \dfrac{9 \cdot 4 \cdot 30 - 11 \cdot 60 + 3 \cdot 51{,}962}{6} = 95{,}981\,KN \\ R_C = 60\,KN \end{cases}$$

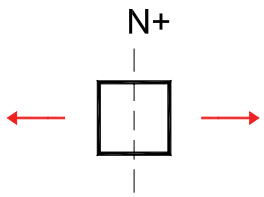
Risolto il problema dell'equilibrio esterno si passa alla determinazione delle caratteristiche della

sollecitazione nelle sezioni **F**, **G** e **H**.

Sezione F

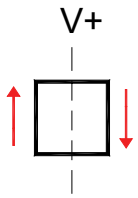
Le caratteristiche della sollecitazione sono calcolate considerando tutte le forze a sinistra di **F**. Per evitare di commettere errori è riportato come riferimento per ogni sollecitazione lo schema di sezione con il verso delle sollecitazioni positive.

Sforzo Normale



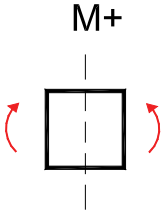
$$N_F = -R_{AX} = -30\,KN$$

Taglio



$$V_F = +R_{AY} = 15{,}981\,KN$$

Momento Flettente

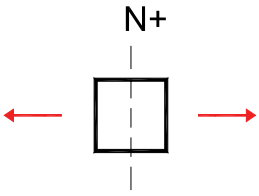


$$M_F = +1{,}5 \cdot R_{AY} = 1{,}5 \cdot 15{,}981 = 23{,}971\,KNm$$

Sezione G

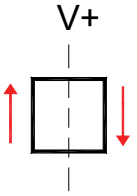
Le caratteristiche della sollecitazione sono determinate considerando tutte le forze a sinistra di G.

Sforzo Normale



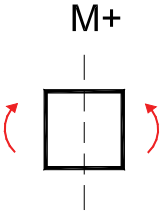
$$N_G = -R_{AX} + F_x = -30 + 30 = 0$$

Taglio



$$V_G = R_{AY} - F_y = 15{,}981 - 51{,}962 = -35{,}981\,KN$$

Momento Flettente



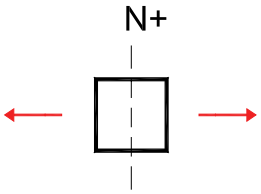
$$M_G = 4{,}5 \cdot R_{AY} - 1{,}5 \cdot F_y =$$

$$M_G = 4{,}5 \cdot 15{,}981 - 1{,}5 \cdot 51{,}962 = -6{,}028\,KNm$$

Sezione H

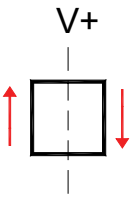
Le caratteristiche della sollecitazione sono determinate considerando tutte le forze a destra di **H**.

Sforzo Normale



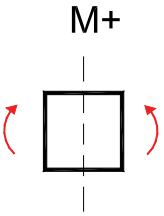
$$N_H = 0$$

Taglio



$$V_H = 3 \cdot q - R_C = 3 \cdot 30 - 60 = 30\,KN$$

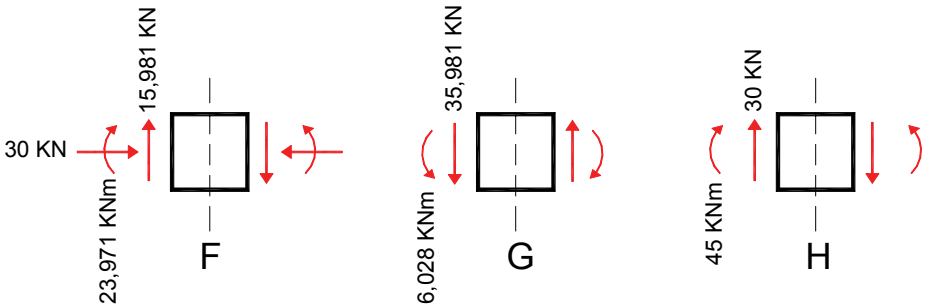
Momento Flettente



$$M_H = -\frac{3^2 \cdot q}{2} + 3 \cdot R_C$$

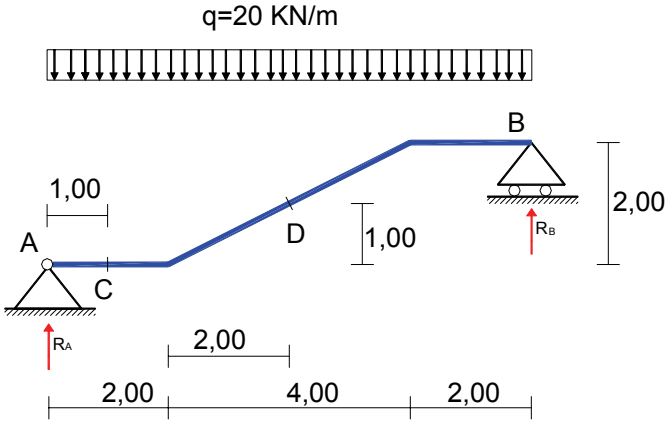
$$M_H = -\frac{3^2 \cdot 30}{2} + 3 \cdot 60 = 45KNm$$

Per chiarezza espositiva si rappresentano gli schemi delle tre sezioni studiate con i risultati ottenuti.



2) Per lo schema strutturale rappresentato in figura, si determinino le caratteristiche della sollecitazione nelle sezioni C e D.

Nella figura è stata omessa la rappresentazione della componente orizzontale della reazione vincolare della cerniera in **A** che deve essere nulla poiché tutte le forze esterne applicate ed anche la reazione vincolare R_B sono verticali. Poiché la reazione vincolare in **A** è costituita dalla sola forze verticale,



per chiarezza espositiva questa viene indicata semplicemente con R_A. Risolvendo l'equilibrio esterno della struttura si ottengono inoltre i seguenti risultati per le reazioni vincolari.

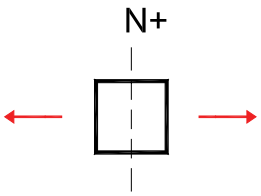
$R_A = 80\,KN$; $R_B = 80\,KN$

Procediamo ora a calcolare le caratteristiche della sollecitazione nelle sezioni richieste, ricordando che lo sforzo normale rappresenta la risultante di tutte le forze e le componenti di forze che precedono la sezione e che agiscono sulla direzione parallela all'asse della trave nella sezione, mentre il taglio è dato dalla risultante di tutte le forze e le componenti di forze, che precedono la sezione e che agiscono sulla direzione perpendicolare all'asse della trave nella sezione.

Sezione C

Le caratteristiche della sollecitazione sono determinate prendendo in considerazione tutte le forze a sinistra di **C**.

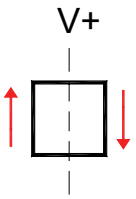
Sforzo Normale



$N_C = 0$

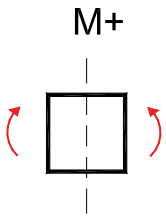
(Alla sinistra di C non vi è alcuna componente di forza che agisce sulla direzione orizzontale)

Taglio



$V_C = R_A - 1 \cdot q = 80 - 1 \cdot 20 = 60\,KN$

Momento Flettente

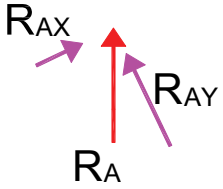


$M_C = 1 \cdot R_A - 1 \cdot q \cdot 0{,}5 = 80 - 20 \cdot 0{,}5$

$M_C = 70\,KNm$

Sezione D

La sezione **D** appartiene ad un tratto di trave inclinato, e pertanto per determinare lo sforzo Normale ed il Taglio occorre procedere alla scomposizione delle forze agenti secondo la direzione parallela e perpendicolare all'asse del tratto di trave a cui la sezione **D** appartiene.

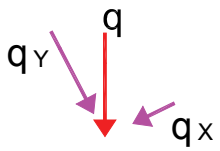


Indicando con **x** la direzione parallela alla trave, con **y** quella perpendicolare e con **α** l'angolo di inclinazione della trave, si ha:

$\alpha = arctg\frac{2}{4} = 26°,57$

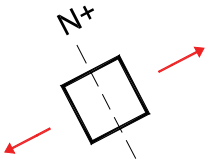
$R_{Ax} = R_A \cdot sen26°,57 = 80 \cdot sen26°,57 = 35,783\,KN$

$$R_{Ay} = R_A \cdot \cos 26°,57 = 80 \cdot \cos 26°,57 = 71,551\,KN$$
$$q_x = q \cdot sen26°,57 = 20 \cdot sen26°,57 = 8,946\,KN/m$$
$$q_y = q \cdot \cos 26°,57 = 20 \cdot \cos 26°,57 = 17,888\,KN/m$$



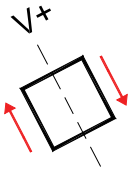
Scomposte le forze in gioco, possiamo calcolare le caratteristiche della sollecitazione nella sezione **D.**

Sforzo Normale



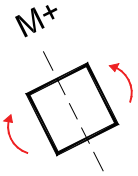
$$N_D = -R_{AX} + 3 \cdot q_X =$$
$$N_D = -35,783 + 3 \cdot 8,946 = -8,945\,KN$$

Taglio



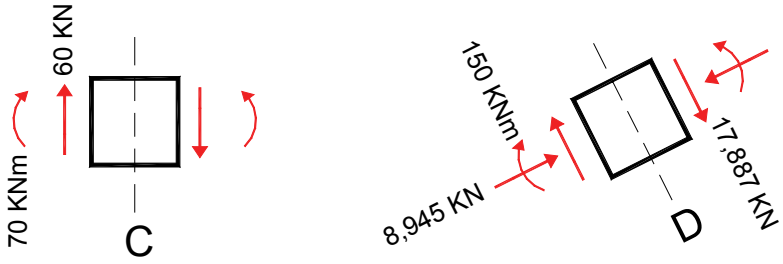
$$V_D = R_{AY} - 3 \cdot q_Y =$$
$$V_D = 71,551 - 3 \cdot 17,888 = 17,887\,KN$$

Momento Flettente



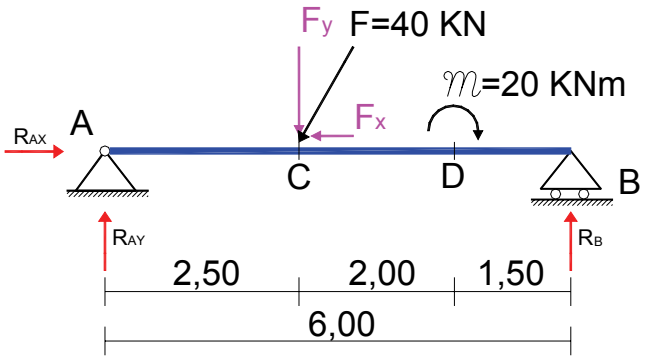
$$M_D = 3 \cdot R_A - 3 \cdot q \cdot 1,5 = 3 \cdot 80 - 3 \cdot 20 \cdot 1,5$$
$$M_C = 150\,KNm$$

Per chiarezza si rappresentano gli schemi delle due sezione studiate con i risultati ottenuti.



3) Si determinino le caratteristiche della sollecitazione nelle sezioni C e D dello schema strutturale rappresentato in figura. Si consideri la forza F inclinata sull'orizzontale di un angolo pari a 60°.

Risolvendo l' esercizio verificheremo che nelle sezioni dove sono applicate forze concentrate diviene indeterminata la soluzione dell'equilibrio interno per la sollecitazione che corrisponde alla forza applicata. In particolare nella sezione **C** è indeterminato sia il valore del Taglio sia lo sforzo Normale, mentre nella sezione **D** è indeterminato il valore del Momento flettente.



Considerato che la forza che la forza **F** forma un angolo di 60° sull'orizzontale si ha:

$$F_x = F \cdot \cos 60° = 40 \cdot \cos 60° = 20\,KN$$
$$F_y = F \cdot sen60° = 40 \cdot sen60° = 34{,}641\,KN$$

Per l'equilibrio alla traslazione orizzontale della struttura deve essere $R_{AX} - F_X = 0$ e quindi:

$$R_{AX} = 20\,KN$$

Imponendo l'equilibrio alla rotazione intorno ad **A** si ha:

$$2{,}5 \cdot F_y + \mathcal{M} - 6 \cdot R_B = 0$$
$$R_B = \frac{2{,}5 \cdot F_y + \mathcal{M}}{6} = \frac{2{,}5 \cdot 34{,}641 + 20}{6} = 17{,}767\,KN$$

Per l'equilibrio alla traslazione verticale deve essere: $R_{AY} - F_Y + R_B = 0$ e quindi

$$R_{AY} = F_Y - R_B = 34{,}641 - 17{,}767 = 16{,}874\,KN$$

I risultati ottenuti per le reazioni vincolari sono tutti positivi e quindi confermano i versi delle reazioni ipotizzati nello schema grafico.

Determiniamo lo Sforzo Normale nella sezione **C**. Lo calcoliamo prima tenendo conto delle forze applicate sul tratto di trave alla sinistra di **C** e poi tenendo conto delle forze applicate sul tratto di trave a destra di **C**.

$\mathbf{N}_C$ valutato con le forze a sinistra di **C**

La sola forza che agisce secondo la direzione dell'asse della trave è R_{AX}; lo sforzo Normale $\mathbf{N}_c$ dovrebbe valere:

$$N_C = -R_{AX} = -20\,KN$$

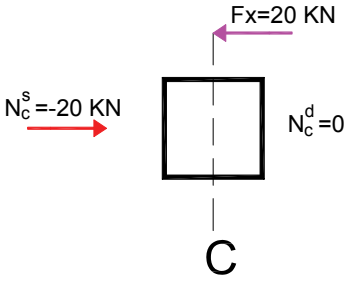
$\mathbf{N}_C$ valutato con le forze a destra di **C**

Sul tratto di trave alla destra di **C** non è applicata alcuna forza che abbia direzione parallela all'asse della trave e pertanto lo sforzo Normale $\mathbf{N}_C$ dovrebbe essere nullo.

$$N_C = 0$$

Entrambi i procedimenti di calcolo sono corretti per la determinazione di $\mathbf{N}_C$, ma i risultati ottenuti sono però diversi. L'aver ottenuto due risultati diversi pone due ordini di problemi:

a) Nella sezione **C** è rispettato l'equilibrio interno?
b) Quanto vale lo sforzo Normale nella sezione **C**?



Per rispondere a queste domande proviamo a rappresentare le forze assiali che agiscono sulla sezione **C**.

Alla sinistra di **C** abbiamo determinato un valore dello sforzo Normale pari a –20 KN, corrispondente ad una compressione e

quindi ad una forza diretta verso la sezione. Alla destra di **C** abbiamo invece determinato che lo sforzo Normale è nullo. In effetti nella sezione **C** risulta applicata anche la forza concentrata F_X che non è stata considerata in nessuna delle due modalità per il calcolo dello sforzo Normale in **C**, infatti essendo la forza applicata proprio in **C** non può essere considerata né tra le forze agenti a sinistra di **C** né tra le forze agenti a destra di **C**. Disegno alla mano, possiamo ora rispondere alla prima domanda. L'equilibrio interno nella sezione **C** è rispettato, infatti la forza agente a sinistra di **C** è equilibrata proprio dalla F_X. Per quanto riguarda invece la risposta alla seconda domanda dobbiamo rispondere che in realtà nella sezione **C** il valore dello sforzo Normale risulta indeterminato, ma possiamo però determinare due valori diversi di N_C uno valido per una sezione immediatamente a sinistra di **C** prima dell'applicazione della forza concentrata F_X e un altro valore dello sforzo Normale valido per una sezione immediatamente a destra di **C** dopo l'applicazione della forza F_X.

In definitiva, ***in una sezione nella quale è applicata una forza assiale concentrata, il valore dello sforzo Normale è indeterminato; in tal caso, si deve calcolare lo sforzo normale in due sezioni prossime alla sezione in esame, di cui una posizionata immediatamente prima e l'altra posizionata immediatamente dopo***.

Queste due sezioni vanno distinte dalla sezione in esame attraverso l'uso degli apici s (sinistra) e d (destra). Nell'esempio specifico dell'esercizio, la sezione C, i due valori dello sforzo Normale calcolati saranno indicati rispettivamente con i simboli N_C^s e N_C^d e si riferiranno rispettivamente ai valori dello sforzo Normale presenti nella sezione immediatamente a sinistra di **C** ed immediatamente a destra di **C**.

Ricapitolando, nell'intorno della sezione **C** abbiamo i seguenti valori dello sforzo Normale:

$$N_C^s = -20\,KN \qquad N_C^d = 0$$

Determiniamo ora il Taglio nella sezione **C**. Anche per il taglio si provvede a calcolarne il valore considerando prima il tratto di sinistra e poi quello di destra.

$\mathbf{V}_C$ valutato con le forze a sinistra di **C**

La sola forza che agisce secondo la direzione perpendicolare all'asse della trave è R_{AY}; lo sforzo di Taglio $\mathbf{V}_c$ dovrebbe valere:

$$V_C = +R_{AY} = +16{,}874\,KN$$

$\mathbf{V}_C$ valutato con le forze a destra di **C**

Alla destra della sezione **C** si ha che l'unica forza che agisce secondo la direzione perpendicolare all'asse della trave è $\mathbf{R}_B$; il Taglio $\mathbf{V}_C$ dovrebbe quindi valere:

$$V_C = -R_B = -17{,}767\,KN$$

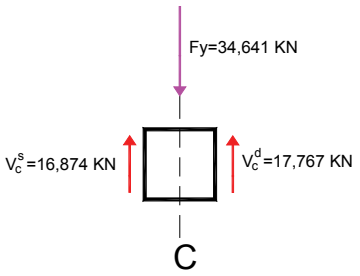
Anche per il taglio nella sezione **C** otteniamo due risultati diversi a seconda del metodo di calcolo adottato, e anche per il Taglio potremo porci le stesse domande:

a) Nella sezione **C** è rispettato l'equilibrio interno relativo allo sforzo di Taglio?

b) Quale è il valore da attribuire al Taglio nella sezione **C**?

Rappresentiamo i risultati ottenuti.

Dal disegno della sezione **C** con la rappresentazione delle forze, si può facilmente constatare che l'equilibrio alla traslazione verticale è rispettato, ma anche in questo caso, la presenza della forza concentrata in **C** rende indeterminato il valore del taglio nella sezione di applicazione della forza.



In una sezione nella quale è applicata una forza perpendicolare all'asse della trave lo sforzo di Taglio risulta indeterminato; in tal caso si determinano due valori dello sforzo di Taglio che corrisponderanno allo sforzo di Taglio in due sezioni, una immediatamente prima ed una immediatamente dopo l'applicazione della Fy.

Queste due sezioni andranno distinte dalla sezione in esame attraverso l'uso degli apici *s* (sinistra) e *d* (destra). Nel caso specifico della sezione **C** abbiamo calcolato il taglio in due sezioni, una immediatamente a sinistra e l'altra immediatamente a destra, ottenendo i seguenti valori:

$$V_C^s = 16{,}874\,KN \qquad V_C^d = 17{,}767\,KN$$

Determiniamo ora il Momento nella sezione C.

Anche qui calcoleremo il Momento riferendoci prima alle forze agenti a sinistra di C e poi considerando le forze agenti alla destra di C.

M$_C$ valutato con le forze a sinistra di **C**

La sola forza che produce un momento intorno alla sezione **C** è R_{AY}; R_{AX} ha invece, la sua retta d'azione che passa proprio per **C** e quindi non produce momento intorno a **C**. Il Momento Flettente in **C** varrà quindi:

$$M_C = 2{,}5 \cdot R_{AY} = 2{,}5 \cdot 16{,}874 = 42{,}185\,KNm$$

M$_C$ valutato con le forze a destra di **C**

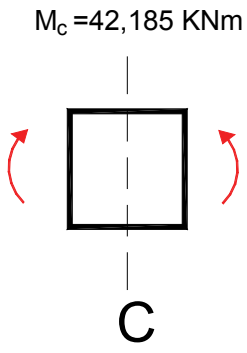
Alla destra della sezione **C** si ha che oltre alla coppia $\mathcal{M}$, l'unica forza che produce momento è R_B; il Momento Flettente **M**$_C$ vale quindi:

$$M_C = -\mathcal{M} + 3{,}5 \cdot R_B = -20 + 3{,}5 \cdot 17{,}767 = 42{,}185\,KNm$$

Il risultato, a meno degli arrotondamenti effettuati, coincide con il risultato ottenuto con le forze a sinistra di **C**.

Come ci si poteva attendere, nella sezione **C** nonostante l'applicazione delle forze concentrate il valore del Momento Flettente risulta unico e quindi determinato.

Per completezza di esposizione si rappresenta graficamente anche il risultato di $\mathbf{M}_C$.



Si passa ora a determinare le caratteristiche della sollecitazione nella sezione **D** nella quale risulta applicata la coppia concentrata $\mathcal{M}$.

Scopriremo che in tale sezione sia il Taglio che lo Sforzo Normale risultano determinati, mentre il valore del Momento Flettente è invece indeterminato. Anche in questa sezione per provare quanto asserito provvediamo a calcolare i valori delle caratteristiche della sollecitazione considerando prima le forze a sinistra di **D** e poi le forze a destra di **D**.

$\mathbf{N}_D$ valutato considerando le forze a sinistra di **D**.

Alla sinistra di **D** e nella direzione dell'asse della trave agiscono due Forze, R_{AX} ed F_X. Tenendo presente la convenzione dei segni per lo sforzo Normale si calcola il seguente valore per $\mathbf{N}_D$.

$$N_D = -R_{AX} + F_x = -20 + 20 = 0$$

$\mathbf{N}_D$ valutato considerando le forze a destra di **D**.

Alla destra di D non agisce alcuna forza nella direzione parallela all'asse della trave e quindi si conferma che lo sforzo Normale in D è nullo.

$$N_D = 0$$

Entrambi i metodi di calcolo hanno fornito lo stesso valore di $\mathbf{N}_D$ che risulta quindi univocamente determinato.

$\mathbf{V}_D$ valutato considerando le forze a sinistra di **D**.

Alla sinistra di **D** e nella direzione perpendicolare all'asse della trave agiscono due Forze, R_{AY} ed F_Y. Tenendo presente la convenzione dei segni per lo sforzo di Taglio si calcola il seguente valore per $\mathbf{V}_D$.

$$V_D = +R_{AY} - F_y = 16{,}874 - 34{,}641 = -17{,}767\,KN$$

$\mathbf{V}_D$ valutato considerando le forze a destra di **D**.

Alla destra di **D** e nella direzione perpendicolare all'asse della trave agisce solo la Forza, $\mathbf{R}_B$. Tenendo presente la convenzione dei segni per lo sforzo di Taglio si calcola il seguente valore per $\mathbf{V}_D$.

$$V_D = -R_B = -17{,}767\,KN$$

Entrambi i metodi di calcolo hanno fornito lo stesso valore di $\mathbf{V}_D$ che risulta quindi univocamente determinato.

Calcoliamo ora il momento flettente $\mathbf{M}_D$.

$\mathbf{M}_D$ valutato considerando le forze a sinistra di **D**.

Alla sinistra di **D** le forze che ci producono un momento intorno a **D** sono R_{AY} e F_Y. Tenendo presente la convenzione dei segni per il Momento Flettente si calcola il seguente valore per $\mathbf{M}_D$.

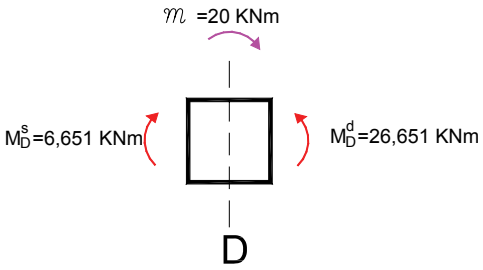
$$M_D = 4{,}5 \cdot R_{AY} - 2 \cdot F_y = 4{,}5 \cdot 16{,}874 - 2 \cdot 34{,}641 = 6{,}651\,KNm$$

$\mathbf{M}_D$ valutato considerando le forze a destra di **D**.

Alla destra di **D** l'unica forza che produce momento intorno a **D** è $\mathbf{R}_B$. Tenendo presente la convenzione dei segni per il Momento Flettente si calcola il seguente valore per $\mathbf{M}_D$.

$$M_D = +1{,}5 \cdot R_B = 1{,}5 \cdot 17{,}767 = 26{,}651\,KNm$$

Così come anticipato abbiamo ottenuto per $\mathbf{M}_D$ due valori diversi. Per interpretare fisicamente i risultati rappresentiamo graficamente i valori ottenuti e valutiamo l'equilibrio interno alla rotazione nella sezione **D**.



Nonostante sulle due facce della sezione **C** agiscano due valori diversi del momento flettente, l'equilibrio alla rotazione della sezione è comunque assicurato dalla presenza della coppia concentrata applicata esternamente proprio in **C**.

Analogamente a quanto riscontrato nelle sezioni in cui sono applicate forze concentrate: **In una sezione nella quale è applicata una coppia concentrata m il valore del Momento Flettente risulta indeterminato; in tal caso si determinano due valori del Momento che corrisponderanno al valore del Momento Flettente in due sezioni, una immediatamente prima ed una immediatamente dopo la sezione di applicazione della coppia concentrata M.**

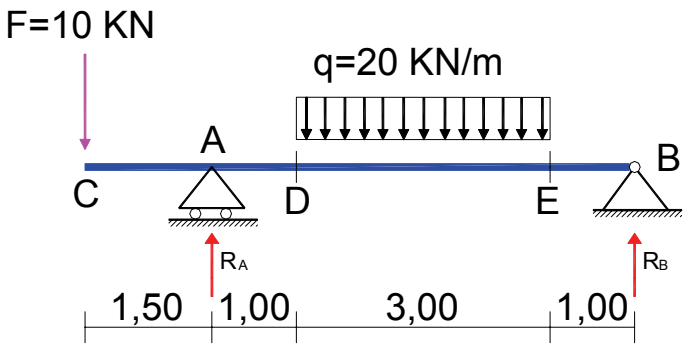
Nello specifico della sezione **D** esaminata si hanno i seguenti due valori riferiti alle due sezioni adiacenti la sezione **D**.

$$M_D^s = 6{,}651\,KNm \qquad M_D^d = 26{,}651\,KNm$$

4) Per lo schema strutturale rappresentato in figura, si determinino le caratteristiche della sollecitazione nelle sezioni A, B, C , D e **E.**

Nello schema si è omesso di rappresentare la reazione vincolare R_{BX} che deve essere nulla in quanto sulla trave non è applicata alcuna forza avente una componente orizzontale.

Per la determinazione delle reazioni vincolari incognite, si considererà prima l'equilibrio alla rotazione intorno a **B** e ancora poi l'equilibrio alla rotazione intorno ad **A**. Questo è una metodologia di soluzione tipiche per le travi semplicemente appoggiate, dove, scrivendo l'equilibrio alla rotazione intorno alla sezione dove è applicato un vincolo si ottiene una equazione con una sola incognita rappresentata dalla reazione dell'altro vincolo.



Equilibrio alla rotazione intorno a **B**

$$-6{,}5 \cdot F + 5 \cdot R_A - 2{,}5 \cdot 3 \cdot q = 0$$

$$R_A = \frac{6{,}5 \cdot F + 2{,}5 \cdot 3 \cdot q}{5} = \frac{6{,}5 \cdot 10 + 2{,}5 \cdot 3 \cdot 20}{5} = 43\,KN$$

Equilibrio alla rotazione intorno ad **A**

$$1{,}5 \cdot F + 2{,}5 \cdot 3 \cdot q - 5 \cdot R_B = 0;$$

$$R_B = \frac{2{,}5 \cdot 3 \cdot q - 1{,}5 \cdot F}{5} = \frac{2{,}5 \cdot 3 \cdot 20 - 1{,}5 \cdot 10}{5} = 27\,KN$$

Poiché sia $\mathbf{R}_A$ che $\mathbf{R}_B$ risultano positivi, i versi presunti nello schema grafico sono coerenti con i risultati ottenuti.

Prima di procedere al calcolo delle caratteristiche della sollecitazione nelle sezioni indicate dalla traccia, si vuole proporre al lettore un metodo di calcolo delle sollecitazioni che pur essendo perfettamente equivalente al metodo classico consente di pervenire ai risultati cercati con un numero minore di calcoli. Il procedimento proposto scaturisce da questa semplice considerazione.

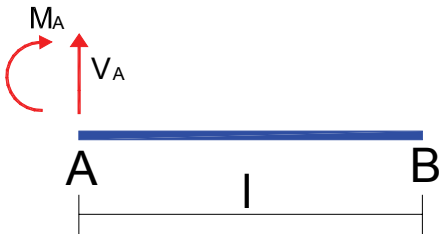
a) Il Taglio in una sezione, rappresenta la risultante di tutte le forze ortogonali alla trave agenti a sinistra della sezione;
b) Il Momento Flettente in una sezione rappresenta il Momento Risultante di tutte le forze a sinistra della sezione rispetto alla sezione stessa.

Per le considerazioni appena espresse, si può pensare di utilizzare per il calcolo delle sollecitazioni in una sezione i risultati ottenuti in un'altra sezione che precede e per i quali sono già stati calcolati sia il Taglio che il Momento Flettente. In pratica, poiché il Taglio ed il Momento calcolati in una generica sezione **A** rappresentano la risultante ed il momento risultante rispetto ad **A** del sistema di forze che precede **A**, per calcolare le sollecitazioni in **B** si può considerare al posto di tutte le forze che precedono **A** proprio il Taglio e Il momento in **A** considerando in

aggiunta solo le eventuali altre forze presenti nel tratto **AB**. Per meglio chiarire quanto appena detto si faccia riferimento agli schemi che seguono i quali illustrano alcuni dei casi riscontrabili frequentemente nella pratica. I casi sono presentati considerando che nella sezione in **A** le sollecitazioni siano di segno positivo, così che i risultati simbolici ottenuti possano essere utilizzati alla stregua di formule. E' ovvio che nelle applicazioni pratiche del metodo, andranno sostituiti ai simboli i valori reali comprensivi del segno algebrico.

a) Si consideri un tratto di trave **AB** nel quale si ritengono noti i valori del Taglio e del Momento in **A**. Si vogliono determinare il Taglio ed il Momento nella sezione **B**, considerando che tra la sezione **A** e la sezione **B** non è applicata alcuna forza.

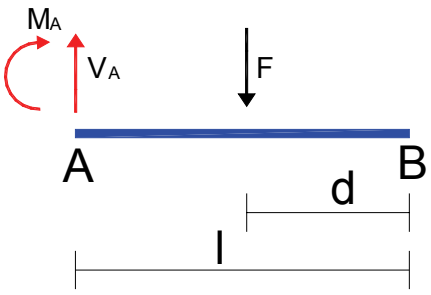
$\mathbf{V}_A$ e $\mathbf{M}_A$ rappresentano la Risultante ed il Momento risultante rispetto ad **A** di tutte le forze che precedono la sezione **A**. Le sollecitazioni in **B** possono calcolarsi sostituendo al sistema di tutte le forze che precedono **A** proprio la risultante ed il momento risultante. I valori di $\mathbf{V}_B$ e $\mathbf{M}_B$ si possono quindi ottenere con le espressioni che seguono:



$$V_B = V_A$$
$$M_B = M_A + V_A \cdot l$$

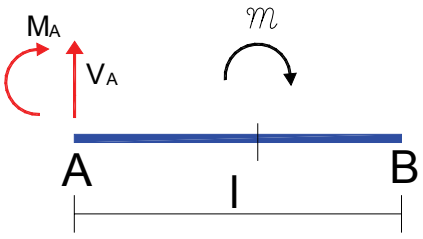
b) Si consideri un tratto di trave **AB** nel quale si ritengono noti i valori del Taglio e del Momento in **A**. Si vogliono determinare il Taglio ed il Momento nella sezione **B**, considerando che tra la sezione **A** e la sezione **B** è applicata una forza **F** alla distanza **d** dalla sezione **B**.

Considerando che al sistema di forze che precede la sezione **A** può sostituirsi la sua risultante ed il suo momento risultante ed essendo noti i valori di $\mathbf{V}_A$ e di $\mathbf{M}_A$, $\mathbf{V}_B$ e $\mathbf{M}_B$ possono calcolarsi con le espressioni che seguono:



$$V_B = V_A - F$$
$$M_B = M_A + V_A \cdot l - F \cdot d$$

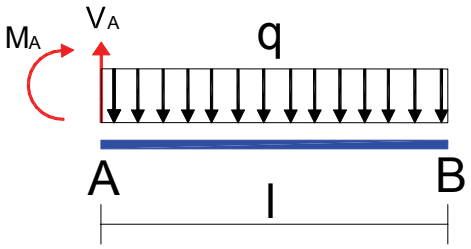
c) Si consideri un tratto di trave **AB** nel quale si ritengono noti i valori del Taglio e del Momento in **A**. Si vogliono determinare il Taglio ed il Momento nella sezione **B**, considerando che tra la sezione **A** e la sezione **B** è applicata una coppia concentrata $\mathcal{m}$.



$\mathbf{V}_B$ e $\mathbf{M}_B$ possono calcolarsi con le espressioni che seguono:

$$V_B = V_A$$
$$M_B = M_A + V_A \cdot l + \mathcal{M}$$

d) Si consideri un tratto di trave **AB** nel quale si ritengono noti i valori del Taglio e del Momento in **A**. Si vogliono determinare il Taglio ed il Momento nella sezione **B**, considerando che tra la sezione **A** e la sezione **B** è applicato un carico uniformemente distribuito **q**.



$\mathbf{V}_B$ e $\mathbf{M}_B$ potranno calcolarsi con le espressioni che seguono:

$$V_B = V_A - q \cdot l$$
$$M_B = M_A + V_A \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = M_A + V_A \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2}$$

Attraverso l'applicazione del metodo di calcolo appena illustrato si procede al calcolo delle sollecitazioni richieste dall'esercizio tenendo presente che nelle sezioni dove è applicata una forza concentrata saranno calcolati due valori del Taglio, uno valido immediatamente a sinistra della sezione ed uno valido immediatamente a destra della sezione.

Si procede prima al calcolo del Taglio in tutte le sezioni per le quali si richiede di conoscerne il valore e poi al calcolo dei Momenti Flettenti.

$$V_C^d = -F = -10\,KN$$
$$V_A^s = -V_c^d = -10\,KN$$
$$V_A^d = V_A^s + R_A = -10 + 43 = 33\,KN$$
$$V_D = V_A^d = 33\,KN$$
$$V_E = V_D - q \cdot l = 33 - 20 \cdot 3 = -27\,KN$$
$$V_B^s = V_D = -27\,KN$$

$$M_C = 0$$
$$M_A = V_C^d \cdot l = -10 \cdot 1{,}5 = -15\,KNm$$
$$M_D = M_A + V_A^d \cdot l = -15 + 33 \cdot 1 = 18\,KNm$$
$$M_E = M_D + V_D \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = 18 + 33 \cdot 3 - 20 \cdot \frac{3^2}{2} =$$
$$M_E = 27\,KNm$$
$$M_B = M_E + V_E \cdot l = 27 - 27 \cdot 1 = 0$$

E' ovvio che il Taglio ed il Momento in **B** potevano ricavarsi immediatamente considerando che $V_B^s = -R_B = -27\,KN$ ed $M_B = 0$ in quanto a destra di **B** non vi è nessuna forza, ma proprio il riscontro di questi valori "noti" attraverso il metodo di calcolo proposto può costituire una prova dell'esattezza dei risultati analitici ottenuti e quindi dell'assenza di errori di calcolo nel procedimento adottato.

4 – I Diagrammi delle Caratteristiche della sollecitazione

Per progettare una struttura ed effettuare le relative verifiche di resistenza occorre determinare le caratteristiche della sollecitazione in ogni sezione costituente la trave o gli elementi di trave di cui è costituita la struttura. Per fare ciò, si potrebbe pensare di suddividere la struttura in tanti tratti piccolissimi e di individuare così moltissime sezioni nelle quali calcolare le caratteristiche della sollecitazione; il procedimento, seppur possibile (in realtà in alcuni procedimenti di calcolo automatico è proprio ciò che viene fatto), comporterebbe un enorme lavoro di calcolo e comunque fornirebbe dei risultati che seppur riferiti a moltissime sezioni non ci aiutano a comprendere appieno il comportamento meccanico delle strutture.

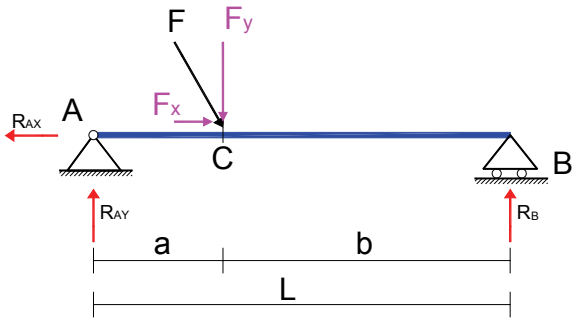
Per meglio definire lo studio dell'equilibrio interno e determinare nel contempo le caratteristiche della sollecitazione in ogni sezione costituente la struttura, si ricorre alla rappresentazione in forma grafica e analitica dei **diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione**.

Analizzando con attenzione una struttura si può riscontrare che almeno per tratti di trave, i valori delle singole sollecitazioni presentano variazioni che sono esprimibili attraverso semplici equazioni algebriche che, aventi carattere di continuità nel tratto considerato, ci forniscono sia in forma grafica che analitica, i valori della caratteristica cercata per qualunque sezione individuata nel tratto. Lo studio, esteso a tutti i tratti e per ogni caratteristica della sollecitazione, ci consente di conoscere appieno lo stato di sollecitazione interna della struttura.

Ciò che si è appena descritto può apparire per il momento poco chiaro ma, procedendo per gradi e con l'ausilio di semplici esempi applicativi, si cercherà di chiarire meglio i concetti espressi e gli algoritmi da adottare. Nel corso dell'esposizione verranno anche riscontrati in maniera semplice alcuni concetti teorici che consentono di descrivere alcune proprietà dei diagrammi che, tenute ben presenti, faciliteranno il compito nella costruzione di tali diagrammi e consentiranno anche di verificare opportunamente la bontà dei risultati analitici ottenuti.

4.1 - La trave semplice caricata da una forza concentrata

Si consideri la semplice struttura rappresentata in figura. Si tratta di una trave semplicemente appoggiata soggetta ad una forza concentrata **F** scomposta nelle due componenti $\mathbf{F}_x$ ed $\mathbf{F}_y$. La trave e di lunghezza **L** mentre al forza è applicata in una sezione posta alla distanza **a** dalla cerniera **A** ed alla distanza **b=L-a** dall'Appoggio **B**. La struttura verrà risolta in forma "letterale" così che ai risultati si possano



considerare di validità generale.

La soluzione del equilibrio esterno ci fornisce i seguenti valori delle reazioni vincolari.

$R_{AX} = F_x$ (Il grafico riporta il giusto verso di $\mathbf{R}_{AX}$)

Equilibrio alla rotazione intorno ad **A :** $a \cdot F_Y - L \cdot R_B = 0 \Rightarrow R_B = \frac{F_Y \cdot a}{L}$

Equilibrio alla rotazione intorno a **B**: $L \cdot R_{AY} - b \cdot F_Y = 0 \Rightarrow R_{AY} = \frac{F_Y \cdot b}{L}$

Determiniamo ora i valori del Taglio e del Momento nelle sezioni **A**, **B** e **C**.

$V_A^d = R_{AY} = \frac{b \cdot F_Y}{L}$ $\qquad M_A = 0$

$V_C^s = V_A^d = \frac{b \cdot F_Y}{L}$

$V_C^d = V_C^s - F_Y = \frac{b \cdot F_Y}{L} - F_Y = -\frac{(L-b) \cdot F_Y}{L} = -\frac{a \cdot F_Y}{L}$ $\qquad M_C = V_A^d \cdot a = \frac{b \cdot F_Y}{L} \cdot a = \frac{a \cdot b \cdot F_Y}{L}$

$V_B^s = V_C^d = -\frac{a \cdot F_Y}{L}$ $\qquad M_B = 0$

I valori del Taglio e del Momento sono stati calcolati procedendo da sinistra a destra lungo la trave utilizzando così i risultati ottenuti nella sezione che precede. In questo specifico esercizio il metodo non è particolarmente conveniente, infatti, sia il valore di V_C^d, sia il valore di V_B^S si potrebbe determinare direttamente, considerando che alla destra della sezione **C** agisce solo la forza $\mathbf{R}_B$ che, cambiata di segno, ci fornisce proprio il valore del Taglio cercato.

M_A è evidentemente nullo, infatti, nessuna forza o coppia agisce a sinistra di **A** ($M_A = 0$). In modo analogo si può rapidamente accertare che M_B è anch'esso nullo poichè nessuna forza o coppia esiste a destra di **B**.

Lo sforzo Normale nelle sezioni **A**, **B** e **C** assume i seguenti valori:

A sinistra di **A** agisce la forza $\mathbf{R}_{AX}$ diretta verso sinistra, pertanto immediatamente a destra di **A,** lo sforzo Normale è di trazione e quindi positivo e con valore pari al modulo della forza **F**x.

$$N_A^d = +R_{AX} = F_X$$

A sinistra della sezione **C** lo sforzo Normale vale ancora

$$N_C^s = N_A^d = F_X$$

mentre a destra di **C** sarà nullo per effetto della applicazione della forza $\mathbf{F}_X$.

$$N_C^d = N_C^s - F_X = F_X - F_X = 0$$

Abbiamo fin'ora calcolato le sollecitazioni in alcune sezioni particolari della trave, ma ora dobbiamo rappresentare le sollecitazioni in ogni sezione della trave. I diagrammi dlle caratteristiche della sollecitazione, che andremo ora a disegnare, li costruiremo su sistemi di

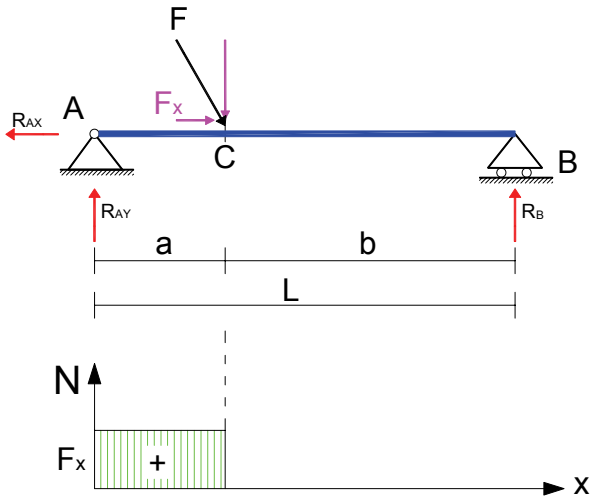
riferimento cartesiani in cui ad ogni ascissa x corrisponderà una sezione della trave. In pratica tali diagrammi saranno costruiti in proiezione dello stesso schema strutturale.

Cominciamo dapprima a costruire il diagramma dello sforzo Normale.

Al di sotto della trave rappresentiamo gli assi cartesiani di riferimento, ponendo l'origine degli assi in corrispondenza della sezione **A**. La direzione dell'asse **x** sarà parallela all'asse della trave e con le ascisse **x** crescenti nel verso che va da **A** a **B**; Con tale impostazione l'ascissa generica **x** corrisponderà ad una sezione **X** sulla trave posta alla distanza **x** da **A**. I valori di **N** positivi saranno rappresentati al di sopra dell'asse **x** (più precisamente la direzione positiva di **N** sarà alla sinistra di un osservatore che si muova sull'asse **x** nel verso positivo).

Per disegnare il diagramma procediamo nel modo che segue.

Scelta in modo opportuno la scala grafica per la rappresentazione (decideremo per esempio a quanti KN di sforzo Normale corrispondano ogni cm), cominciamo col rappresentare il valore di $\mathbf{N}_A$ in corrispondenza dell'ascissa x=0 (sulla verticale della sezione **A**). Ora immaginiamo di spostarci un po' verso destra nel tratto di trave tra la sezione **A** e la sezione **C**. Qualunque posizione assumiamo in tale tratto possiamo verificare che il valore dello sforzo Normale resta costante e pari al valore di $\mathbf{N}_A$; infatti in questo tratto non si incontra nessuna altra forza con componente orizzontale ed il valore di **N** dipenderà sempre e solo dalla forza R_{AX}.



In ogni sezione compresa nel tratto **AC** lo sforzo Normale si mantiene costante e pari al valore in **A,** quindi nel diagramma dobbiamo disegnare un segmento che partendo dal valore di $\mathbf{N}_A$ prosegue parallelamente all'asse **x** fino ad intersecare la proiezione della sezione **C**. Nella sezione **C** dovremo poter leggere due valore di $\mathbf{N}_C$, uno immediatamente a sinistra ed uno immediatamente a destra. Il valore a sinistra risulta già rappresentato con il valore terminale assunto in **C** dal segmento appena disegnato. Alla destra di **C** lo sforzo Normale sarà sempre uguale a zero, infatti in qualunque sezione compresa nel tratto di trave tra le sezioni **C** e **B** si avrà che $N = R_{AX} - F_x = F_x - F_x = 0$. Il diagramma dello sforzo Normale è completato.

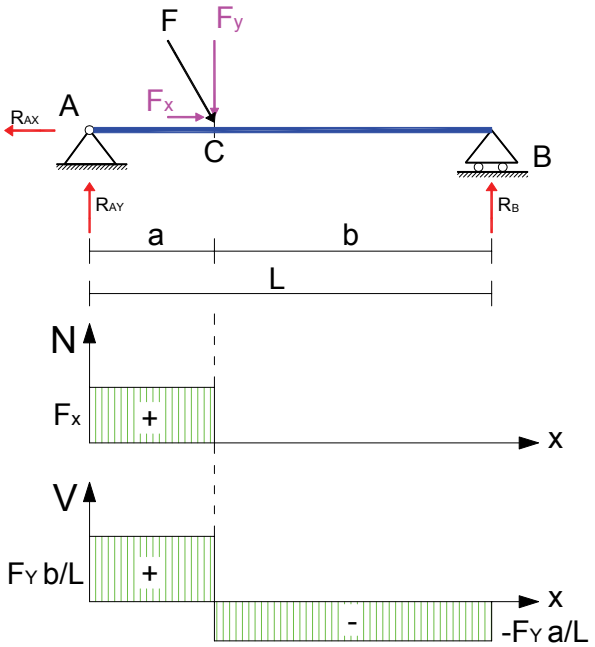
Costruiamo ora il diagramma dello sforzo di Taglio.

Il verso positivo di **V** è definito in maniera analoga al verso positivo di **N**.

Scelta una adeguata scala grafica anche per il Taglio si rappresenta in corrispondenza della sezione **A** (x=0) il valore di $V_A^d = \dfrac{F_Y \cdot b}{L}$. Ora ponendoci in una qualunque sezione nel tratto di trave tra

A e **C**, verifichiamo che il valore del taglio rimane costante e sempre pari al valore assunto nella sezione **A**. Infatti nel tratto **AC** non si incontra alcuna forza con componente verticale e quindi il Taglio, qualunque sezione si consideri, sarà sempre pari a $\mathbf{R}_{AY}$. Il diagramma nel tratto **AC** è rappresentato allora da un segmento orizzontale intersecante l'asse **V** nel valore assunto da $\mathbf{V}_A$.

Nella sezione **C** è applicata la forza $\mathbf{F}_Y$, quindi in **C** dovremo poter leggere nel diagramma due valori di $\mathbf{V}_C$, uno valido immediatamente a sinistra di **C** e l'altro immediatamente a destra di **C**. Il valore del Taglio a sinistra di **C** è già rappresentato dal tratto di diagramma appena disegnato, mentre andrà ora rappresentato nel diagramma il valore in **C** del Taglio a destra. Tale valore viene rappresentato anch'esso al piede della proiezione del punto **C** (In questo caso il valore del Taglio a destra di **C** è negativo e pertanto il segmento rappresentante V_C^d si estende al di sotto dell'asse **x**).



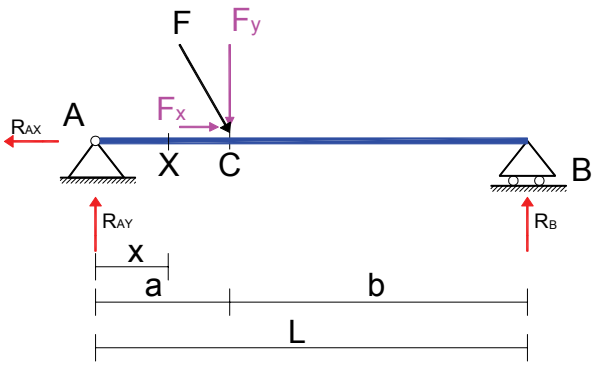
Considerando ora una qualunque sezione posta nel tratto di trave **CB**, possiamo verificare che il valore del Taglio si manterrà costante e pari sempre a V_C^d. In ogni sezione del tratto il Taglio sarà pari a $-\mathbf{R}_B$ e quindi pari a $V_B^s = -\dfrac{F_Y \cdot a}{L}$. Il diagramma sarà quindi realizzato con un segmento parallelo all'asse **x** che individua appunto un valore del Taglio costante e pari a $-\dfrac{F_Y \cdot a}{L}$.

Il diagramma del Taglio per la struttura considerata è quindi costituito da due tratti rettilinei che individuano il valore del Taglio rispettivamente in qualunque sezione nel tratto **AC** e nel tratto **CB**. Il salto del diagramma nella sezione **C** è costituito da un segmento verticale che nella scala grafica del Taglio è pari proprio al modulo della forza $\mathbf{F}_Y$ applicata in **C**.

Passiamo ora a costruire il diagramma del Momento Flettente.

Per convenzione il diagramma del Momento si disegna considerando il verso positivo alla destra dell'asse **x** (…alla destra di un osservatore che percorre l'asse x nel verso delle x crescenti). Si dice anche che la convenzione dei segni per la rappresentazione del diagramma del Momento impone che in ogni sezione il valore del Momento sia rappresentato dal lato delle fibre tese. Se si riflette un attimo si ricorderà che un Momento Flettente positivo in una sezione, produce l'allungamento delle fibre inferiori e quindi considerando l'asse **x** alla stregua dell'asse della trave valori positivi del Momento andranno rappresentati nella parte inferiore dell'asse **x**.

Fissata la suddetta convenzione e un idonea scala grafica per la rappresentazione dei valori del momento, passiamo al disegno del diagramma.

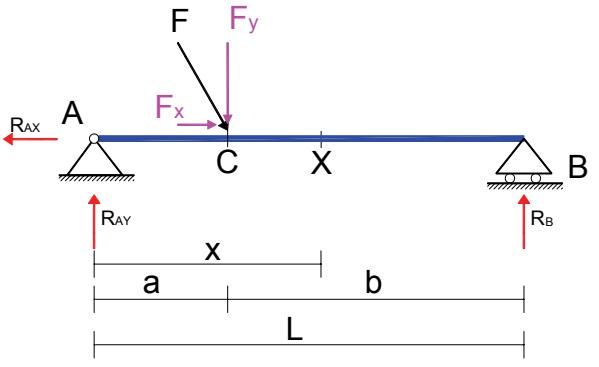


Nel tratto **AC** della trave, conosciamo per adesso i soli valori del Momento in **A** ($M_A = 0$) ed in **C** ($M_C = \frac{F \cdot a \cdot b}{L}$). Il nostro diagramma dovrà allora passare per l'origine degli assi in corrispondenza della sezione **A**, mentre in **C** deve rappresentare proprio il valore di $\mathbf{M}_C$. Per valutare le sezioni intermedie del tratto, immaginiamo di calcolare il valore del Momento in una sezione generica **X** posta alla distanza **x** da **A**. Il Momento sarà dato dal prodotto della Forza $\mathbf{R}_{AY}$ per la distanza **x,**

$$M(x) = R_{AY} \cdot x = V_A^d \cdot x = \frac{F_Y \cdot b}{L} \cdot x$$

L'espressione ricavata ci dice che il Momento nel tratto **AC** cresce proporzionalmente alla distanza della sezione **X**. L'espressione ricavata, è idonea a rappresentare analiticamente il valore di **M** in ogni sezione del tratto **AC**; infatti, nella sezione **A,** x=0 e quindi $M_A = \frac{F_Y \cdot b}{L} \cdot 0 = 0$, mentre nella sezione **C**, x=a è $M_C = \frac{F_Y \cdot b}{L} \cdot a$, che coincide con il valore prima calcolato per $\mathbf{M}_C$.

L'espressione di $M(x)$ altro non è che l'equazione di una retta passante per l'origine degli assi, pertanto il diagramma del Momento nel tratto **AC** sarà rappresentato dal segmento che congiunge l'origine degli assi con il valore di $\mathbf{M}_C$ nella sezione **C**.



Nel tratto **CB** conosciamo il valore del Momento in **C** ed il valore del momento in **B** ($M_B = 0$). Si può facilmente verificare che il diagramma del Momento nel tratto **CB** è anch'esso costituito da un segmento di retta che congiunge il valore di $\mathbf{M}_C$ in **C** e il valore nullo nella posizione della sezione **B**. A tal proposito immaginiamo di dover calcolare il valore del Momento in una sezione generica **X** individuata nel tratto di trave **CB** alla distanza **x** dall'Appoggio **A**. Valutando il Momento in **X,** tenendo conto delle forze che agiscono a sinistra della sezione **X**, si ottiene la seguente espressione del Momento:

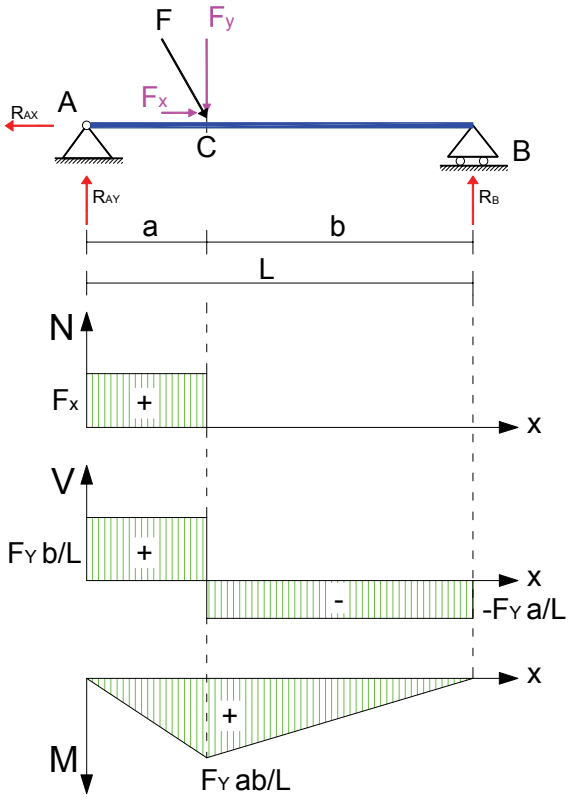
$$M(x) = R_{AY} \cdot x - F_Y \cdot (x-a) = \frac{F_Y \cdot b}{L} \cdot x - F_Y \cdot x + F_Y \cdot a$$

$$M(x) = \left(\frac{b}{L} - 1\right) \cdot F_Y \cdot x + F_Y \cdot a = \left(\frac{b-L}{L}\right) \cdot F_Y \cdot x + F_Y \cdot a$$

$$M(x) = -\frac{F_Y \cdot a}{L} \cdot x + F_Y \cdot a$$

Ricordando che l'equazione $y = m \cdot x + c$ rappresenta l'equazione di una retta, si può riconoscere che l'espressione del Momento nel tratto **CB** è proprio rappresentato da una retta la cui equazione è $M(x) = -\frac{F_Y \cdot a}{L} \cdot x + F_Y \cdot a$ nella quale il termine $-\frac{F_Y \cdot a}{L}$ rappresenta il coefficiente angolare m e il termine $F_Y \cdot a$ è il valore assunto dalla costante c.

Verificato che anche nel tratto **CB** il diagramma è costituito da una retta, conoscendo due punti di tale retta (il valore di $\mathbf{M}_C$ ed il valore di $\mathbf{M}_B$) questa è graficamente determinata. Il diagramma del momento per la trave assegnata è costituito quindi da due tratti di retta, di cui il primo è individuato congiungendo il punto di nullo in **A** con il valore di $\mathbf{M}_C$ in **C**, mentre il secondo tratto si ottiene congiungendo il valore $\mathbf{M}_C$ nella sezione **C** con il valore nullo del Momento in **B**.



Le equazioni che ci forniscono il valore del Momento in ogni sezione della trave **AB** sono due, in quanto due sono i tratti di retta che ne formano il diagramma. Ognuna delle due equazione è valida solo per i valori di **x** che si riferiscono a sezioni che appartengono al tratto di trave di cui l'equazione ci fornisce il valore del Momento. Le equazioni del Momento di cui riferiamo sono quelle appena individuate e che con matematicamente si scrivono nel seguente modo:

1) $M(x) = \frac{F_Y \cdot b}{L} \cdot x \quad \forall x \in [0; a]$

2) $M(x) = -\frac{F_Y \cdot a}{L} \cdot x + F_Y \cdot a \quad \forall x \in [a; L]$

Nel tratto **AC** l'equazione del Momento è data dall'espressione **1)** che è valida per ogni valore di **x** compresa nell'intervallo di valori tra **0** ed **a**.

Nel tratto **BC** l'equazione del momento è la **2)** che fornisce i valori di **M** per ogni valore della **x** compresa nell'intervallo di valori tra **a** ed **L**.

Così come sono state ricavate le equazioni del diagramma del Momento possono ricavarsi anche quelle per il diagramma dello sforzo Normale e per il diagramma del Taglio. Facendo riferimento ad una sezione **X** nel tratto AC si ottengono le seguenti equazioni di **N** e di **V**:

$$N(x) = +F_X \qquad \forall x \in]0; a[$$

$$V(x) = +\frac{F_Y \cdot b}{L} \qquad \forall x \in]0; a[$$

Le due espressioni ricavate rappresentano entrambi le equazioni di una retta parallela all'asse delle **x**. Si noti, inoltre, che il campo di validità delle equazioni è individuato da un intervallo aperto, infatti, sia nel punto **A** e sia nel punto **C**, per la presenza di Forze concentrate il valore dell'equazione deve risultare indeterminato (il punto **A** corrisponde a x=0 ed il punto **C** corrisponde a x=a).

Nel tratto **CB** le equazioni dello sforzo normale e del Taglio sono:

$$N(x) = 0 \qquad \forall x \in]a; L]$$

$$V(x) = -\frac{F_Y \cdot a}{L} \qquad \forall x \in]a; L[$$

L'intervallo di validità dell'equazione del Taglio è un intervallo aperto data l'indeterminazione del valore del Taglio nella sezione **C** e nella sezione **B** (la sezione **C** corrisponde a x=a e la sezione **B** corrisponde a x=L). L'intervallo di validità dell'equazione dello sforzo Normale risulta aperto nella sezione **C** (x=a) per la presenza della forza $\mathbf{F}_X$ che causa l'indeterminazione dello sforzo Normale in **C**. L'intervallo è chiuso nella sezione **B** (x=L) perché la $\mathbf{R}_B$ è perpendicolare all'asse della trave e non produce effetti e quindi indeterminazioni per lo sforzo Normale.

Completato lo studio di questa trave, interpretiamo fisicamente alcuni risultati ottenuti.

Le equazioni del Momento Flettente ricavate dall'esercizio esprimono le equazioni di due rette:

1) $M(x) = \frac{F_Y \cdot b}{L} \cdot x \qquad \forall x \in [0; a]$

2) $M(x) = -\frac{F_Y \cdot a}{L} \cdot x + F_Y \cdot a \qquad \forall x \in [a; L]$

L'equazione generica di una retta si pone con la forma $y = m \cdot x + c$ nella quale il coefficiente angolare m rappresenta la pendenza della retta rispetto all'asse delle x. Nelle equazioni del momento notiamo quanto segue:

- Nell'equazione **1)** il coefficiente angolare è pari $\frac{F_Y \cdot b}{L}$ e rappresenta quindi la pendenza del diagramma del momento rispetto all'asse x. Il coefficiente angolare è positivo e quindi la pendenza del diagramma del momento nel primo tratto è positiva, cioè, il momento

cresce al crescere delle x. Si noti che il valore $\frac{F_Y \cdot b}{L}$ corrisponde in realtà al valore del Taglio, costante in tutto il primo tratto.

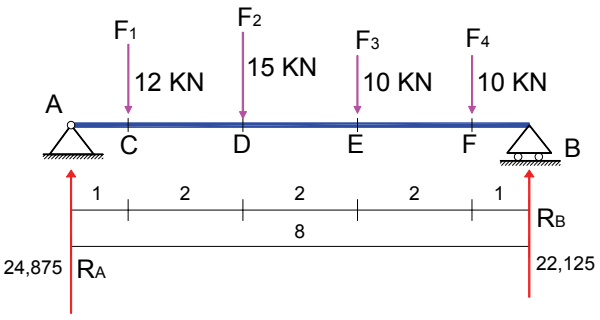
- Nell'equazione **2)** il coefficiente angolare è pari a $-\frac{F_Y \cdot a}{L}$ e rappresenta la pendenza del diagramma del momento nel secondo tratto. Il valore del coefficiente angolare è negativo e quindi nel secondo tratto il valore del momento decresce al crescere delle x. Anche per questo secondo tratto di diagramma si noti che il valore $-\frac{F_Y \cdot a}{L}$ altro non è che il valore del taglio, costante in tutto il secondo tratto.

Queste semplici considerazioni ci permettono di osservare quanto segue:

1. **La pendenza del diagramma del momento in una sezione è pari al valore del Taglio nella stessa sezione. Più grande è il valore del Taglio, maggiore è la pendenza del diagramma del momento.**
2. **Nelle sezioni in cui il Taglio è positivo, il diagramma del momento cresce.**
3. **Nelle sezioni in cui il Taglio è negativo il diagramma del momento decresce.**

4.2 - La trave semplice caricata da forze concentrate

Lo schema strutturale assegnato è quello rappresentato a fianco un cui le lunghezze si intendono espresse in metri. La componente orizzontale della reazione vincolare della cerniera **A** è nulla per l'assenza di forze orizzontali sulla trave. Le reazioni vincolari $\mathbf{R}_A$ e $\mathbf{R}_B$ sono calcolate scrivendo due equazioni di equilibrio alla rotazione, una intorno ad **A** e una intorno a **B**.



Equilibrio alla rotazione intorno a **B**.

$$R_A = \frac{12 \cdot 7 + 15 \cdot 5 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 1}{8} = 24{,}875\,KN$$

Equilibrio alla rotazione intorno ad **B**.

$$R_B = \frac{12 \cdot 1 + 15 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 10 \cdot 7}{8} = 22{,}125\,KN$$

Poiché sulla struttura non agisce alcuna forza con componente lungo la direzione dell'asse della trave, lo sforzo Normale è nullo in tutte le sezioni. Le uniche sollecitazioni presenti sono il taglio e il momento flettente e vengono ora calcolate in tutte le sezioni nelle quali sono applicate le forze.

$V_A^d = R_A = 24{,}875$
$V_C^s = V_A^d = 24{,}875$
$V_C^d = V_C^s - 12 = 24{,}875 - 12 = 12{,}875$
$V_D^s = V_C^d = 12{,}875$
$V_D^d = V_D^s - 15 = 12{,}875 - 15 = -2{,}125$
$V_E^s = V_D^d = -2{,}125$
$V_E^d = V_E^s - 10 = -2{,}125 - 10 = -12{,}125$
$V_F^s = V_E^d = -12{,}125$
$V_F^d = V_F^s - 10 = -12{,}125 - 10 = -22{,}125$
$V_B^s = V_F^d = -22{,}125$

$M_A = 0$

$M_C = M_A + V_A^d \cdot 1 = 0 + 24{,}875 \cdot 1 = 24{,}875$

$M_D = M_C + V_C^d \cdot 2 = 24{,}875 + 12{,}875 \cdot 2 = 50{,}625$

$M_E = M_D + V_D^d \cdot 2 = 50{,}625 - 2{,}125 \cdot 2 = 46{,}375$

$M_F = M_E + V_E^d \cdot 2 = 46{,}375 - 12{,}125 \cdot 2 = 22{,}125$

$M_B = M_F + V_F^d \cdot 1 = 22{,}125 - 22{,}125 \cdot 1 = 0$

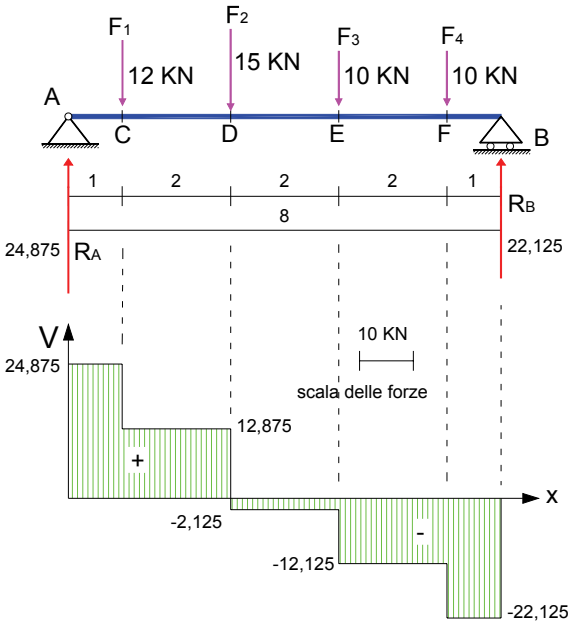
Ovviamente il valore di V_B^s avremmo potuto determinarlo in modo più semplice considerando che $V_B^s = -R_B = -22{,}125$, e allo stesso modo avremmo potuto facilmente asserire che $M_B = 0$ poichè **B** è un semplice appoggio terminale e di conseguenza il Momento, in assenza di coppie concentrate, deve essere nullo. Il modo di procedere che abbiamo adottato però, ci consente di accertare la bontà dei risultati ottenuti.

Una volta calcolati i valori del taglio e del momento nelle sezioni nelle quali sono applicate le forze, siamo in grado di costruire in maniera semplice i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.

Il diagramma del Taglio.

Scelta un'opportuna scala di rappresentazione si riportano in diagramma i valori dei Tagli calcolati nelle sezioni ove sono applicate le forze. Si procede quindi da **A** verso destra nel seguente modo. Ci si pone nel tratto di trave tra **A** e **C**, e si osserva che per qualunque sezione compresa in questo tratto, il valore del Taglio è sempre uguale al valore del Taglio in **A**. Il diagramma sarà quindi costituito da un tratto orizzontale fino a raggiungere la proiezione della sezione **C**.

In tale sezione è applicata una forza e per effetto di questa il valore del Taglio varierà proprio del valore della forza applicata. A destra di **C** il Taglio conserverà il valore V_C^s fino alla sezione **D** dove per effetto della forza applicata si registrerà un altro salto nel diagramma. Proseguendo in questo modo si completa tutto il diagramma del Taglio che sarà quindi costituito da tanti tratti orizzontali

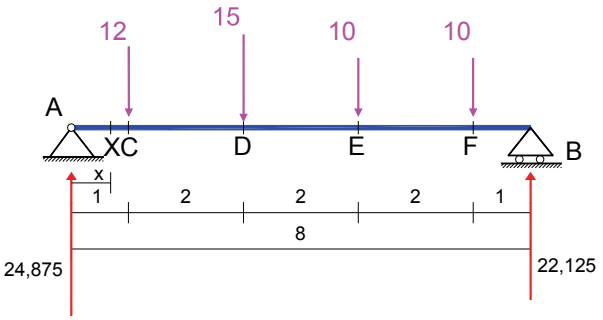


(Taglio costante) congiungenti i valori prima calcolati.

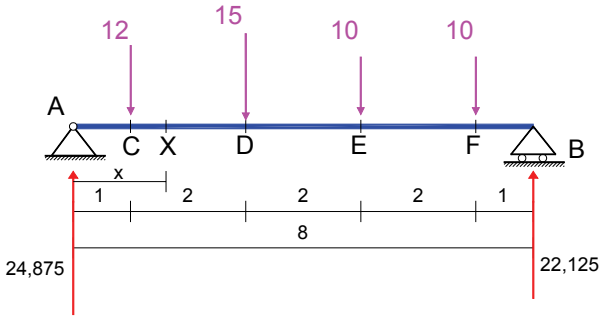
Il diagramma del Momento.

Scelta un opportuna scala di rappresentazione si riportano in corrispondenza delle sezioni **A**, **C**, **B**, **D**, **E** e **F** i valori relativi del Momento flettente prima calcolati. Immaginiamo ora di porci in una sezione **X** nel tratto **AC** posta alla distanza generica **x**, il momento nella sezione **X** è dato dalla seguente espressione:

$$M(x) = V_A^d \cdot x = 24{,}875 \cdot x \qquad \forall x \in [0;1]$$



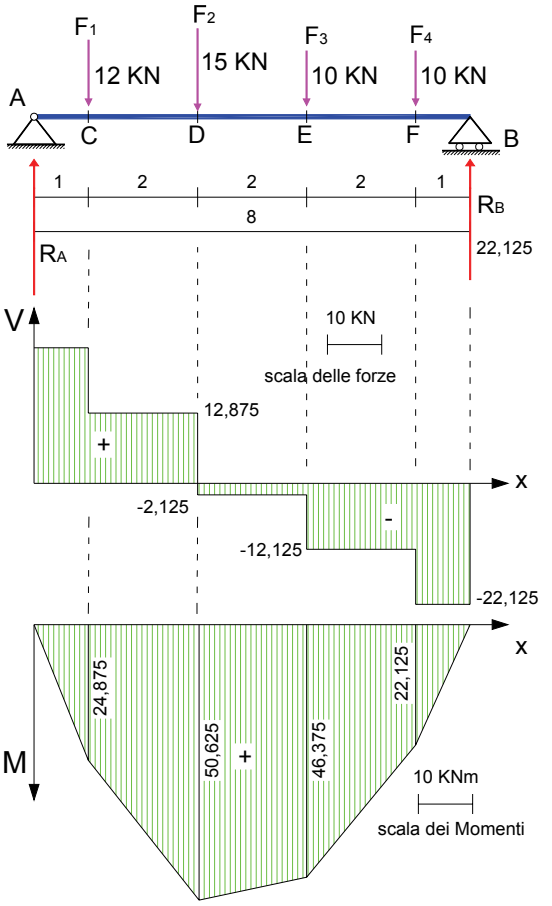
L'espressione ricavata è l'equazione di una retta e quindi il suo digramma può essere disegnato semplicemente congiungendo due punti di tale retta. Il primo punto è il valore del Momento in **A** mentre il secondo punto è rappresentato dal Momento in **C**. Congiungendo questi due punti si disegna il primo tratto del diagramma del Momento.



Per completare il diagramma del Momento non si deve fare altro che congiungere tutti i punti noti che abbiamo prima calcolato con segmenti di retta, in quanto come si può facilmente verificare in ogni tratto di questa trave l'equazione che esprime la variazione del Momento Flettente rappresenta l'equazione di una retta. A riprova di quanto affermato ci si ponga per esempio in una sezione **X** generica posta nel tratto **CD** della trave alla distanza **x** da **A**. L'equazione del momento nel tratto **CD** si ricava nel modo che segue:

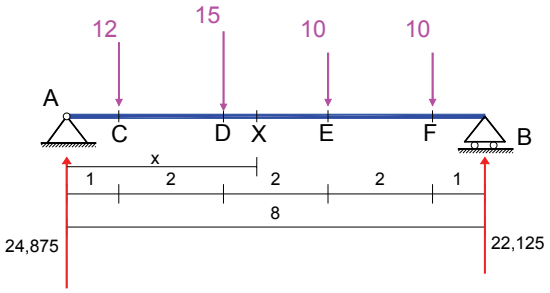
$$M(x) = M_C + V_C^d \cdot (x-1) =$$
$$M(x) = 24{,}875 + 12{,}875 \cdot (x-1) =$$
$$M(x) = 24{,}875 + 12{,}875 \cdot x - 12{,}875$$
$$M(x) = 12{,}875 \cdot x + 12 \qquad \forall x \in [1;3]$$

A riprova di quanto si era affermato, anche in questo tratto di trave il diagramma del Momento



è rappresentato da una retta, e si può anche facilmente constatare che il coefficiente angolare di tale retta è pari proprio al valore del Taglio costante nel tratto in questione.

Si determinano ora le espressioni analitiche dei diagrammi del Taglio e del Momento disegnati. In figura a fianco è riportato lo schema per la determinazione delle equazioni relative al tratto **DE**, mentre si tralascia di riportare i grafici relativi agli altri tratti.



Tratto **AC**

$$V(x) = V_A^d = 24{,}875 \qquad \forall x \in]0;1[$$
$$M(x) = V_A^d \cdot x = 24{,}875 \cdot x \qquad \forall x \in [0;1]$$

Tratto **CD**

$$V(x) = V_C^d = 12{,}875 \qquad \forall x \in]1;3[$$
$$M(x) = 12{,}875 \cdot x + 12 \qquad \forall x \in [1;3]$$

Tratto **DE**

$$V(x) = -2{,}125 \quad \forall x \in]3;5[$$
$$M(x) = M_D + V_d^d \cdot (x-3) = 50{,}625 - 2{,}125 \cdot (x-3) = -2{,}125 \cdot x + 57 \qquad \forall x \in [3;5]$$

Tratto **EF**

$$V(x) = -12{,}125 \qquad \forall x \in]5;7[$$
$$M(x) = M_E + V_E^d \cdot (x-5) = 46{,}375 - 12{,}125 \cdot (x-5) = -12{,}125 \cdot x + 107 \qquad \forall x \in [5;7]$$

Tratto **FB**

$$V(x) = -2212{,}5 \qquad \forall x \in]7;8[$$
$$M(x) = M_F + V_F^d \cdot (x-7) = 22{,}125 - 22{,}125 \cdot (x-7) = -22{,}125 \cdot x + 177 \qquad \forall x \in [7;8]$$

A conclusione dell'esercizio enunciamo le seguenti proprietà dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.

1. **Nei tratti di struttura nei quali sono applicate solo forze concentrate, il diagramma del Taglio è costituito da segmenti di rette orizzontali che presentano discontinuità in corrispondenza delle sezioni dove sono applicate le forze.**
2. **Nei tratti di struttura nei quali sono applicate solo forze concentrate, il diagramma dei Momenti è costituito da tratti rettilinei aventi in ogni tratto pendenza pari a valore del Taglio**
3. **Dove il taglio è positivo il Momento cresce** (retta inclinata verso il basso)**, dove il Taglio è negativo Il momento decresce** (retta inclinata verso l'alto)**.**
4. **Il diagramma del momento raggiunge un valore massimo in corrispondenze della sezione dove il diagramma del taglio interseca l'asse delle x** (V=0)**.**

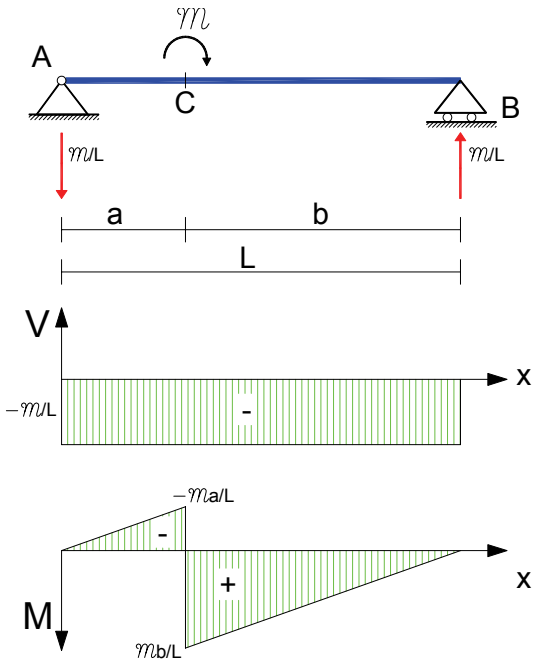
In definitiva la costruzione dei diagrammi del taglio e del momento flettente nelle strutture caricate da sole forze concentrate si effettua nel seguente modo:

Si determinano i valori del Taglio e del Momento in corrispondenza di ogni sezione dove sono applicate le forze, poi rappresentati i punti calcolati sul diagramma, si uniscono quelli del Taglio con tratti orizzontali (paralleli all'asse della trave) e quelli del momento collegando i punti calcolati con dei segmenti di retta.

4.3 - La trave semplice caricata da una coppia concentrata

Si tratta di una trave semplicemente appoggiata caricata da una coppia concentrata $\mathcal{M}$ applicata in una sezione **C** generica della trave. Lo schema viene risolto in forma "letterale" così che le espressioni risolutive che si troveranno potranno essere utilizzate come formule.

L'unico carico agente sulla trave è la coppia $\mathcal{M}$, quindi per l'equilibrio esterno della struttura le reazioni $\mathbf{R}_A$ e $\mathbf{R}_B$ devono costituire una coppia con la stessa intensità di $\mathcal{M}$ ma con verso opposto. I valori e i versi delle reazioni vincolari sono pertanto quelli rappresentati in figura.



Determinate le reazioni vincolari si passa alla determinazione dei Tagli e dei Momenti i quelle sezioni particolari della trave utili al disegno dei diagrammi delle sollecitazioni.

Immediatamente a destra di **A** il Taglio è dato dal valore $V_A^d = -V_A = -\frac{\mathcal{M}}{L}$, proseguendo verso **C** si noti che il valore del Taglio non cambia in quanto l'unica forza a sinistra è sempre e solo la $\mathbf{R}_A$. Anche in corrispondenza della sezione **C** il Taglio non cambia, infatti la coppia applicata non influenza il valore del Taglio. Il Taglio sarà quindi costante su tutta la trave ed il suo diagramma sarà rappresentato da una retta orizzontale di equazione :

$$V(x) = -\frac{\mathcal{M}}{L} \qquad \forall x \in]0; L[$$

Nella sezione **A** e nella sezione **B** il Momento Flettente sarà pari a zero, infatti sia alla sinistra che alla destra di **A**, non ci sono forze o coppie che possano determinare un Momento diverso da zero in **A** e in **B**. In corrispondenza della sezione **C** invece, per effetto della coppia applicata avremo due valori del Momento Flettente, uno valido immediatamente a sinistra di **C** ed uno

valido immediatamente a destra di **C**.

$$M_C^s = -R_A \cdot a = -\frac{\mathcal{M}}{L} \cdot a$$

$$M_C^d = R_B \cdot b = \frac{\mathcal{M}}{L} \cdot b$$

E' facile verificare che la differenza $M_C^d - M_c^s = \mathcal{M}$, cioè è pari proprio alla coppia esterna applicata in **C**.

Scelta un opportuna scala si riportano sul diagramma di **M** i valori di M_C^s e M_C^d. Il diagramma si disegna raccordando con segmenti di retta i valori noti già determinati. Si noti che il Taglio assume un valore costante e negativo lungo tutta la trave, quindi il diagramma del momento deve decrescere sempre e con la stessa pendenza. Si verifichi che il diagramma ottenuto in effetti è sempre decrescente, infatti da un valore nullo in **A** raggiunge un valore negativo in **C** a sinistra, poi ancora a destra di **C** da un valore positivo del Momento al valore nullo in corrispondenza dell'appoggio **B**. I due tratti di retta che costituiscono il diagramma del Momento risulteranno inoltre paralleli. Le equazioni che descrivono il diagramma del Momento sono le seguenti:

$$M(x) = -\frac{\mathcal{M}}{L} \cdot x \qquad \forall x \in [0; a[$$

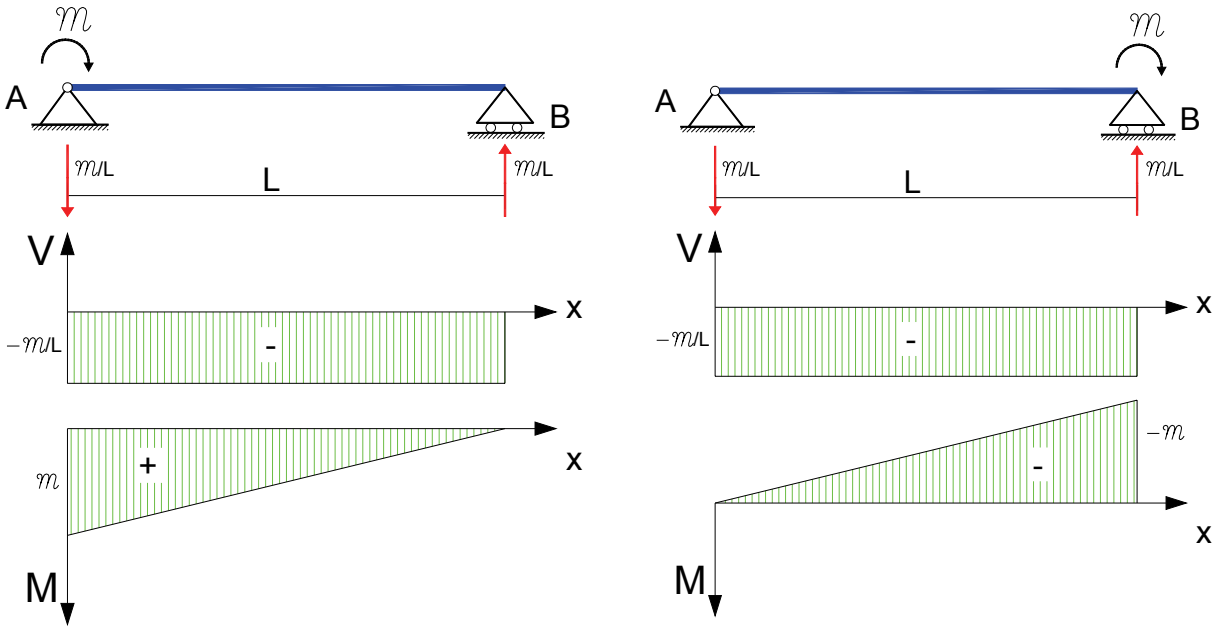
$$M(x) = \frac{\mathcal{M}}{L} \cdot (L - x) \qquad \forall x \in]a; L]$$

Si noti che gli intervalli di validità delle equazioni risultano aperti in corrispondenza della sezione **C** a causa dell'indeterminatezza del Momento causata dalla coppia concentrata esterna applicata proprio in **C**.

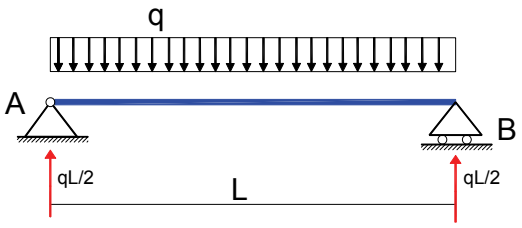
Abbiamo riscontrato in quest'esercizio una ulteriore proprietà del diagramma del Momento.

1. **In un tratto di trave caricato esclusivamente da una coppia esterna $\mathcal{M}$, il diagramma del Momento sarà costituito da due tratti rettilinei paralleli che realizzano una discontinuità nel diagramma nella sezione dove è applicata la coppia esterna di valore pari proprio a $\mathcal{M}$.**

Si riportano ora i due casi tipici di trave semplicemente appoggiata e caricata da una coppia applicata agli estremi. Si omette di descrivere il procedimento risolutivo che è perfettamente identico a quello effettuato nell'esempio già trattato. Al lettore la possibilità di verificare in piena autonomia i risultati ottenuti e rappresentati in figura.



4.4 - La trave semplice caricata da un carico distribuito uniforme



Fino ad adesso ci siamo occupati sempre di travi soggette a carichi concentrati. Vediamo invece cosa accade quando su una trave è applicato un carico di tipo distribuito. Lo schema strutturale da studiare è rappresentato a lato e completato dalla soluzione dell'equilibrio esterno.

Nella cerniera **A** si ha solo la componente verticale della reazione vincolare in quanto non sono applicate sulla trave forze o carichi con componenti lungo l'asse della trave. Le reazioni vincolari $\mathbf{R}_A$ e $\mathbf{R}_B$ si calcolano nel modo che segue:

Equilibrio alla rotazione intorno a B

$$R_A \cdot L - q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{q \cdot L}{2}$$

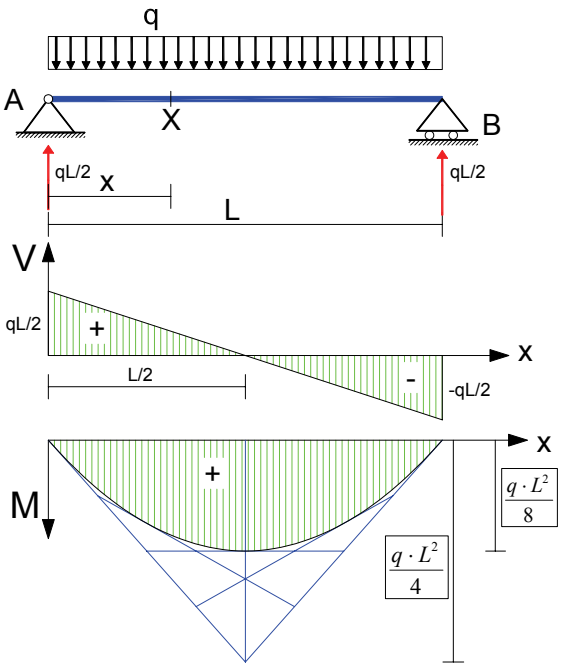
Equilibrio alla traslazione verticale

$$R_A - q \cdot L + R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = q \cdot L - R_A = q \cdot L - q \cdot \frac{L}{2} = q \cdot \frac{L}{2}$$

Risolto il problema dell'equilibrio esterno determiniamo il diagramma del Taglio dopo aver prima individuato il valore del Taglio nelle due sezioni particolari **A** e **B**. Immediatamente a destra di **A** Il Taglio è dato dalla forza R_A e quindi $V_A^d = \frac{q \cdot L}{2}$.

Immediatamente a sinistra di **B** il Taglio può essere determinato considerando tutte le Forze a destra, quindi si ottiene $V_B^s = -\frac{q \cdot L}{2}$.

I due valori Tagli calcolati hanno modulo uguale e verso opposto. Scelta un opportuna scala grafica riportiamo sul diagramma i due valori del Taglio in **A** e in **B**.



Determiniamo ora l'equazione che ci fornisce il valore del Taglio nel Tratto **AB**. Per fare ciò calcoliamo il valore del Taglio in una sezione generica **X** posta alla distanza **x** dall'Appoggio **A**.

$$V(x) = R_A - q \cdot x = -q \cdot x + \frac{q \cdot L}{2}$$

Si riconosce facilmente che l'espressione trovata rappresenta l'equazione di una retta il cui coefficiente angolare è pari a –q. Il diagramma del taglio sarà quindi rappresentato da una retta che si ottiene graficamente congiungendo i due valori già individuati del Taglio in **A** ed in **B**.

In un tratto di trave nel quale è applicato un carico uniformemente distribuito q, il diagramma del Taglio è di tipo lineare (rappresentato da una retta) e la pendenza della retta che lo rappresenta è pari a –q.

Passiamo a determinare il diagramma del Momento considerando che sia in **A** che in **B** il valore del Momento è nullo (appoggi terminali senza coppie applicate). Il nostro diagramma del Momento dovrà presentare punti di nullo in corrispondenza degli appoggi **A** e **B**, mentre in una sezione generica il Momento ci è dato dalla seguente equazione:

$$M(x) = R_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = \frac{q}{2} \cdot x \cdot (L - x)$$

L'espressione ottenuta è l'equazione di una parabola che effettivamente ci fornisce **M**=0 per **x**=0 e per **x**=L. Si potrebbe dimostrare che la pendenza del diagramma del Momento è ancora in ogni sezione pari al valore del Taglio, quindi Il Momento crescerà dove il Taglio è positivo e decrescerà dove il Taglio è negativo. Nella sezione dove il Taglio è uguale a zero il Momento smetterà di crescere per cominciare a decrescere, cioè raggiungerà il suo valore massimo. Per ottenere il valore massimo di **M** basta sostituire nell'equazione del Momento il valore di **x** corrispondente alla sezione dove il taglio è nullo.

Essendo in modulo $V_A^d = V_B^s$ il diagramma del taglio interseca l'asse delle **x** nella sezione di mezzeria della trave, quindi per calcolare il valore del Momento massimo sostituiamo nell'equazione del Momento il valore $x = \frac{L}{2}$.

$$M_{MAX} = \frac{q}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \left(L - \frac{L}{2} \right) = \frac{q}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot L - L}{2} \right) = \frac{q}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

Per disegnare la parabola si abbassa dal punto medio del segmento che congiunge $\mathbf{M}_A$ con $\mathbf{M}_B$ un segmento verticale che nella scala grafica del Momento è pari a $\frac{q \cdot L^2}{4}$. Si congiunge poi il vertice di questo segmento con i punti del diagramma relativi a $\mathbf{M}_A$ e $\mathbf{M}_B$. Queste due rette rappresentano le tangenti alla parabola nei punti $\mathbf{M}_A$ e $\mathbf{M}_B$. Si dividono quindi i due segmenti ottenuti in un numero di parti uguali e poi si congiunge il primo punto di un segmento con l'ultimo dell'altro, il secondo con il penultimo e così via fino ad ottenere ulteriori tangenti della parabola. La parabola andrà disegnata tenendo conto delle tangenti trovate.

Abbiamo risolto la trave soggetta ad un carico distribuito uniforme e abbiamo riscontrato le seguenti proprietà:

1. **Il diagramma del Taglio si rappresenta con un segmento di retta la cui pendenza è pari al valore del carico cambiato di segno.**
2. **Il diagramma del Momento si rappresenta con una parabola la cui pendenza in ogni sezione è pari al valore che assume il Taglio; dove il Taglio è positivo Il Momento tende ad aumentare e dove il taglio è negativo il Momento tende a diminuire; dove il Taglio è uguale a zero il Momento raggiunge il suo valore massimo.**

4.5 - Le proprietà dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.

Con gli esempi di strutture che abbiamo studiato, si sono presentate le diverse tipologie di diagrammi che si possono incontrare nella soluzione delle strutture. Certo in una struttura potremo avere contemporaneamente forze concentrate e carichi distribuiti, magari i carichi distribuiti saranno di tipo trapezoidale, le cose potranno essere numericamente un po' più complesse ma se ricorderemo le proprietà che andiamo ora a ricapitolare, il compito della soluzione delle strutture sarà senz'altro più semplice e certamente lo faremo con piena consapevolezza dei risultati numerici ottenuti.

Ricapitoliamo quindi le proprietà dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.

4.5.1 – Le proprietà del diagramma del Taglio

1) Nei tratti nei quali sono applicati sulla trave solo forze concentrate, il diagramma del Taglio è costituito da tratti di segmenti paralleli all'asse della trave (pendenza nulla). Il diagramma del Taglio è inoltre discontinuo in quelle sezioni dove sono applicate le forze e la discontinuità è data proprio dal valore della forza applicata.

2) Nei tratti di trave dove è applicato un carico uniformemente distribuito il diagramma del Taglio è continuo e rappresentato da un segmento di retta la cui pendenza è pari al valore del carico applicato cambiato di segno.
3) In ogni sezione Il valore del taglio corrisponde alla pendenza del diagramma del Momento.

4.5.2 - Il diagramma del Momento

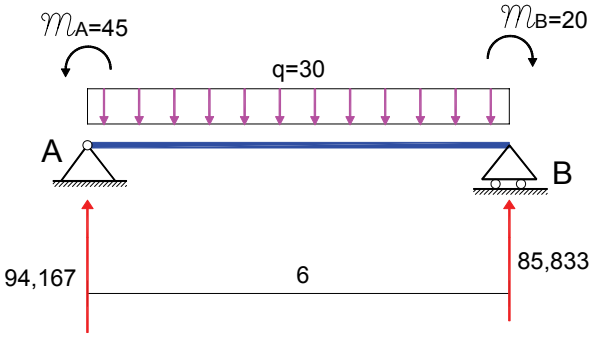
1) Nei tratti di trave dove sono applicate solo forze concentrate il diagramma del Momento è rappresentato con segmenti di retta la cui pendenza è pari proprio al valore del Taglio nel tratto.
2) Nelle sezioni dove sono applicate coppie concentrate il diagramma del Momento presenta una discontinuità il cui valore è pari proprio a quello della coppia applicata.
3) Nei tratti di trave dove sono applicati carichi distribuiti, il diagramma del Momento è rappresentato da una parabola che presenta il suo massimo nella sezione del tratto dove il Taglio è uguale a zero. Dove il taglio è positivo la parabola cresce, dove il taglio è negativo la parabola decresce.

4.6 – Altri schemi strutturali tipici

In questo paragrafo vengono presentati e risolti alcuni esempi di strutture.

4.6.1 – Trave semplicemente appoggiata caricata da un carico distribuito uniforme e da due coppie agli appoggi.

La trave è caricata da un carico uniformemente distribuito e dalle coppie $\mathcal{M}_A$ e $\mathcal{M}_B$ applicate proprio sugli appoggi **A** e **B**. I carichi si intendono espressi in KN mentre i Momenti in KNm. Le reazioni vincolari le calcoliamo scrivendo le equazioni cardinali della statica e risolvendo il sistema di equazioni ottenute.



$$\begin{cases} R_A + R_B - q \cdot L = 0 \\ -\mathcal{M}_A + q \cdot \dfrac{L^2}{2} + \mathcal{M}_B - R_B \cdot 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_A + R_B - 3000 \cdot 6 = 0 \\ -45 + 30 \cdot \dfrac{6^2}{2} + 20 - R_B \cdot 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A + R_B = 180 \\ R_B = \dfrac{-45 + 540 + 20}{6} = 85{,}833 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_A = 180 - 85{,}833 = 94{,}167 \\ R_B = 85{,}833 \end{cases}$$

Risolto il problema dell'equilibrio esterno si determinano i valori del Taglio e del Momento in **A** e

B.

$$V_A^d = R_A = 94{,}167 \qquad M_A = \mathcal{M}_A = -45$$

$$V_b^d = -R_B = -85{,}833 \qquad M_B = -\mathcal{M}_B = -20$$

Rappresentiamo il diagramma del Taglio.

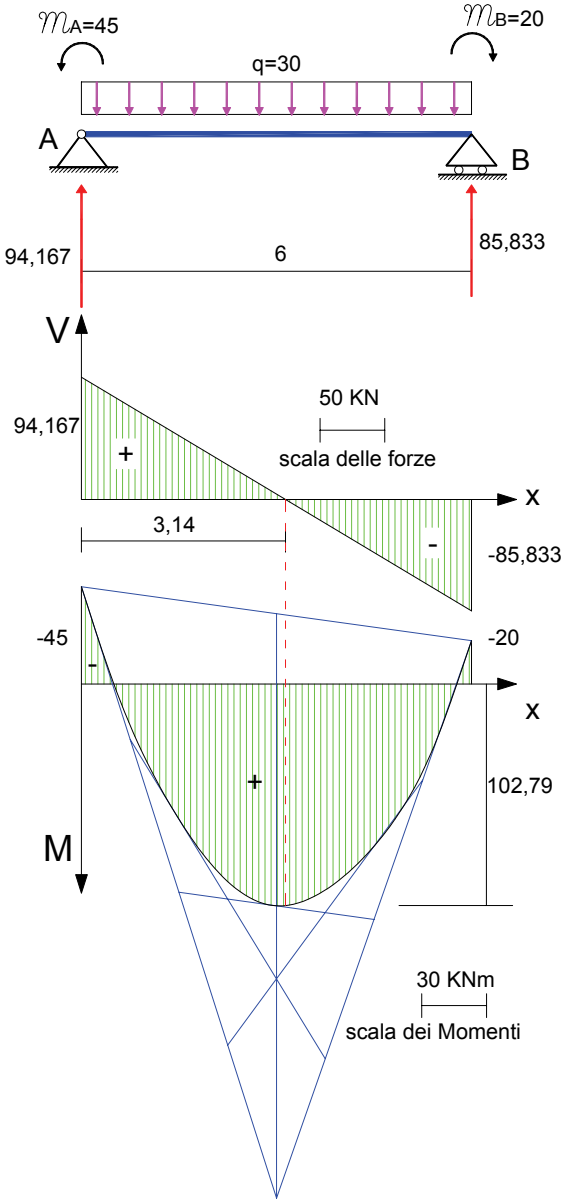
Scelta un opportuna scala grafica per il Taglio riportiamo sul diagramma i valori del Taglio in **A** ed in **B**. Poiché sulla trave è applicato un carico uniformemente distribuito il diagramma del taglio sarà costituito da un segmento di retta che si ottiene congiungendo il valore del Taglio in **A** con il valore del Taglio in **B**. L'equazione del Taglio è la seguente:

$$V(x) = V_A^d - q \cdot x = 94{,}167 - 30 \cdot x \qquad \forall x \in]0;6[$$

La pendenza della retta è pari a **–q**, quindi la tangente dell'angolo che il diagramma del taglio forma con l'asse delle **x** è pari a **–q**. Considerando il triangolo che il diagramma del taglio forma nella zona in cui il Taglio è positivo e conoscendo V_A^d e il valore della tangente dell'angolo opposto, possiamo calcolare la lunghezza del cateto di base del triangolo che rappresenta l'ascissa dove il Taglio è nullo. Detta **x** tale ascissa la formula per calcolarla e la seguente:

$$x = \frac{V_A^d}{q} = \frac{94{,}167}{30} = 3{,}14$$

In corrispondenze di tale ascissa il valore Momento Flettente raggiunge il suo valore massimo.



Disegniamo il diagramma del Momento

Scelta un opportuna scala grafica rappresentiamo sul diagramma i valori del Momento in **A** ed in **B**. Poiché sulla trave è applicato un carico uniformemente distribuito il diagramma del Momento è una parabola che assume i valori $\mathbf{M}_A$ in **A** e $\mathbf{M}_B$ in **B**. Per poter disegnare la parabola si congiunge il valore $\mathbf{M}_A$ con $\mathbf{M}_B$ e dal punto medio di questo segmento abbassiamo un segmento di lunghezza pari a

$$\frac{q \cdot L^2}{4} = \frac{30 \cdot 6^2}{4} = 270\,KNm$$

Disegnate le due tangenti in **A** e in **B** alla parabola, ne dividiamo i segmenti relativi in parti uguali e quindi disegniamo le ulteriori tangenti alla parabola. Disegniamo quindi la parabola tenendo conto di tutte le tangenti ricavate e che inoltre la parabola dovrà presentare il suo massimo valore nella sezione dove il Taglio uguale a zero. Graficamente proprio in questa sezione potremo leggere il valore del Momento massimo.

L'equazione del Momento è data dalla seguente espressione:

$$M(x) = M_A + V_A^d \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M(x) = -45 + 94{,}167 \cdot x - 30 \cdot \frac{x^2}{2}$$

Sostituendo in tale equazione il valore x=3,14 prima calcolato (la sezione dove il Taglio è uguale a zero) otteniamo il valore del Momento Massimo.

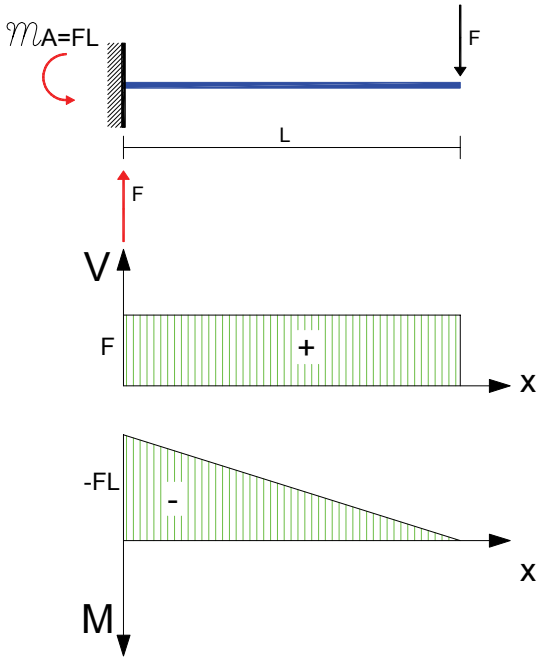
$$M_{MAX} = -45 + 94{,}167 \cdot 3{,}14 - 30 \cdot \frac{3{,}14^2}{2}$$

$$M_{MAX} = 102{,}790\,KNm$$

4.6.2 – Mensola caricata da una forza concentrata in punta

Le equazioni cardinali della statica ci forniscono le seguenti soluzioni per le reazioni vincolari.

$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} = F \\ \mathcal{M}_A = -F \cdot L \end{cases}$$



Il diagramma del Taglio viene costruito considerando in **A**. il Taglio è pari alla reazione vincolare $\mathbf{R}_{AY}$ e quindi a **F** ed inoltre il diagramma deve essere costante fino alla sezione dove è applicata la **F**. L'equazione del Taglio è la seguente:

$$V(x) = F \qquad \forall x \in]0; L[$$

Il Momento presenta i due valori noti:

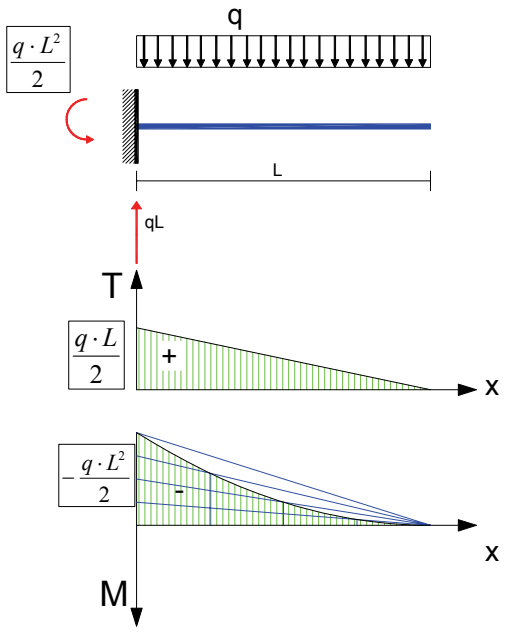
$$M_A = -\frac{q \cdot L^2}{2} \text{ e } M_B = 0\,.$$

Poiché sono applicati solo forze concentrate il diagramma è lineare.

4.6.3 – Mensola caricata da un carico distribuito uniforme

Le equazioni cardinali della statica fornisconole seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} = q \cdot L \\ \mathcal{M}_A = -\dfrac{q \cdot L^2}{2} \end{cases}$$



Il Taglio è uguale a R_{AY} in **A** e a 0 all'altra estremità **B**. Essendo applicato un carico uniformemente distribuito, il diagramma del Taglio è lineare e la pendenza della retta è pari a –q. Il diagramma si disegna congiungendo il punto a Taglio nullo all'estremità della mensola con il valore –qL in corrispondenza dell'incastro.

$$V(x) = R_{AY} - q \cdot x = q \cdot L - q \cdot x = q(L - x)$$

Il Momento è nullo all'estremità libera e pari a $-\dfrac{q \cdot L^2}{2}$ in corrispondenza dell'incastro.

Il diagramma è rappresentato da una parabola che unisce questi due punti. In figura è rappresentata la costruzione grafica per ottenere alcuni punti della parabola.

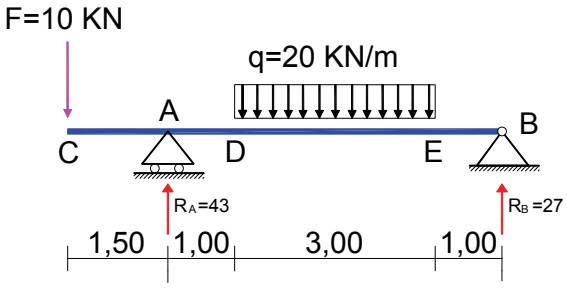
$$M(x) = M_A + R_{AY} \cdot x - q\frac{x^2}{2} = -q\frac{L^2}{2} + qLx - q\frac{x^2}{2}$$

4.7 – Alcuni esempi di strutture

In questo paragrafo vengono presentati e risolti alcuni schemi strutturali di esempio

4.7.1 – Esempio strutturale n° 1 (trave semplice con sbalzo)

La struttura proposta è stata già risolta nei paragrafi introduttivi di questo fascicolo, se ne riportano quindi i risultati ottenuti lasciando al lettore la facoltà di eseguire i procedimenti analitici mancanti che conducono ai risultati qui riportati.



$$R_A = 43\,KN$$

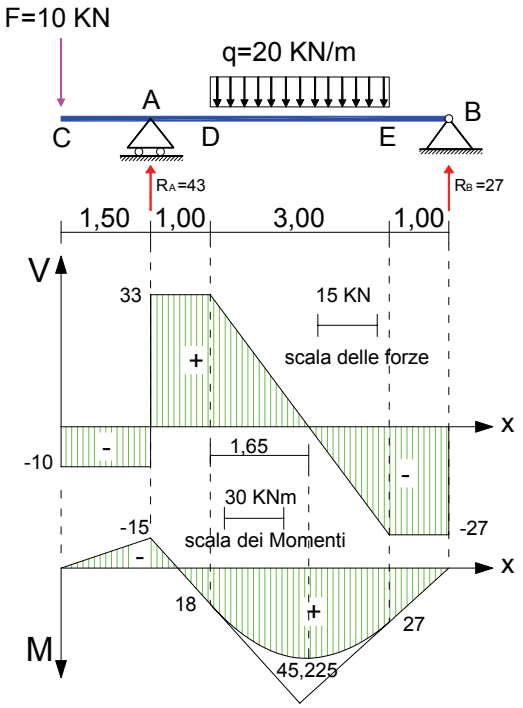
$$R_B = 27\,KN$$

Per poter disegnare i diagrammi delle sollecitazioni occorre conoscere i valori del Taglio e del Momento nelle sezioni dove sono applicati i carichi esterni e le reazioni vincolari.

$$V_C^d = -F = -10\,KN$$
$$V_A^s = -V_c^d = -10\,KN$$
$$V_A^d = V_A^s + R_A = -10 + 43 = 33\,KN$$
$$V_D = V_A^d = 33\,KN$$
$$V_E = V_D - q \cdot l = 33 - 20 \cdot 3 = -27\,KN$$
$$V_B^s = V_E = -27\,KN$$

$$M_C = 0$$
$$M_A = V_C^d \cdot l = -10 \cdot 1{,}5 = -15\,KNm$$
$$M_D = M_A + V_A^d \cdot l = -15 + 33 \cdot 1 = 18\,KNm$$
$$M_E = M_D + V_D \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = 18 + 33 \cdot 3 - 20 \cdot \frac{3^2}{2} =$$
$$M_E = 27\,KNm$$
$$M_B = 0$$

Adottate le opportune scale grafiche, si comincia col disegnare il diagramma del Taglio ricordando che nei tratti nei quali non è applicato un carico distribuito il diagramma è costante mentre dove è applicato il carico distribuito il diagramma è costituito da una retta inclinata.



Riportati nella scala grafica delle forze i valori del Taglio nelle sezioni caratteristiche si procede a disegnare il diagramma partendo dalla sezione **C**. Nel tratto **CA** il Taglio è costante e quindi il diagramma è costituito da un segmento orizzontale. In **A** è applicata una forza e quindi il diagramma presenterà una discontinuità. Nel tratto **AD** il Taglio si mantiene costante e pari al valore in **A**, mentre nel tratto **DE** la presenza del carico distribuito impone che il diagramma del taglio sia costituito da un segmento di retta inclinato. Nel tratto **DE** il diagramma sarà costituito dal segmento che congiunge i valori del Taglio in **D** ed in **E**. Nel tratto **EB** il taglio sarà costante e pari al valore in che assume in **E**. Nel tratto **DE** il diagramma del taglio interseca l'asse di riferimento **x**. Per determinare la sezione dove il Taglio è uguale a zero basta ricordare che la pendenza del diagramma del Taglio è pari al carico **q** applicato, quindi si può facilmente calcolare la distanza della sezione a Taglio nullo dalla sezione **D** nel modo che segue:

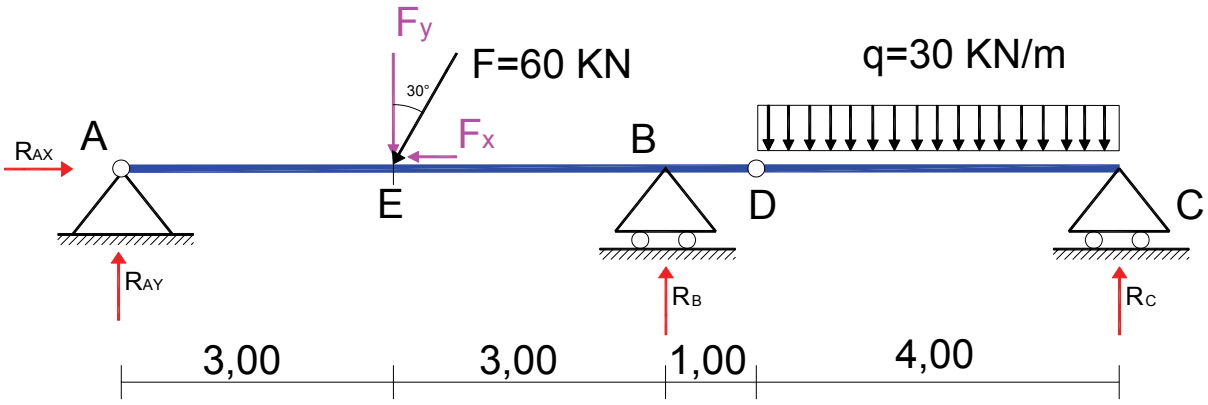
$$x = \frac{V_D}{q} = \frac{33}{20} = 1{,}65m$$

Per disegnare il diagramma del Momento si procede dalla sezione **C** ricordando che nei tratti dove sono applicate solo forze concentrate il diagramma del Momento è costituito da segmenti di retta mentre nel tratto **DE** dove è applicato il carico distribuito **q** il diagramma sarà costituito da una parabola. Il diagramma del Momento nel tratto **CA** si ottiene collegando con un segmento i valori in **C** ed in **A** del Momento. Nel tratto **AD** il diagramma si ottiene collegando il valore $\mathbf{M}_A$

con il valore $\mathbf{M}_D$. Da **D** ad **E** si dovrà avere un tratto di parabola, ma per poterla costruire graficamente, occorre prima disegnare il diagramma del Momento nel tratto **EB** che è costituito da un segmento di retta che dal valore di $\mathbf{M}_E$ raggiunge il valore nullo sull'appoggio terminale **B**. Per disegnare la parabola nel tratto **DE**, si osserva che i segmenti costituenti il diagramma del Momento in **AD** e **EB** rappresentano rispettivamente le tangenti alla parabola in **D** ed in **E**, infatti la pendenza del diagramma del Momento è data dal valore del Taglio e quindi in **D** ed in **E** sia i tratti lineari che la parabola devono avere la stessa pendenza. Prolungando le tangenti si ottiene la loro intersezione e quindi si può effettuare la costruzione grafica per disegnare il tratto di parabola inserito tra i valori $\mathbf{M}_D$ e $\mathbf{M}_E$. La parabola raggiungerà il suo massimo valore in corrispondenza della sezione dove il taglio è nullo. Per calcolare il valore del Momento Massimo si procede tenendo a riferimento i valori del Momento e del taglio in **D** oltre alla distanza **x** da **D** della sezione dove il Taglio è nullo.

$$M_{MAX} = M_D + V_D \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = 18 + 33 \cdot 1{,}65 - 20 \cdot \frac{1{,}65^2}{2} = 45{,}225\,KNm$$

4.7.2 – Esempio strutturale n° 2 (trave Gerber)



Si procede dapprima a scomporre la forza F nelle sue componenti e quindi a calcolare le reazioni vincolari.

$$F_x = F \cdot sen30° = 60 \cdot sen30° = 30\,KN \qquad F_y = F \cdot \cos 30° = 60 \cdot \cos 30° = 51{,}962\,KN$$

Condizioni di equilibrio esterno

$$\begin{cases} R_{AX} - F_x = 0 \\ R_{AY} - F_Y + R_B - 4 \cdot q + R_C = 0 \\ 3 \cdot F_y - 6 \cdot R_B + 9 \cdot 4 \cdot q - 11 \cdot R_C = 0 \\ 2 \cdot 4 \cdot q - 4 \cdot R_C = 0 \end{cases}$$

Sostituendo i valori e risolvendo il sistema si determinano le reazioni vincolari.

$$\begin{cases} R_{AX} = 30\,KN \\ R_{AY} = 15{,}981\,KN \\ R_B = 95{,}981\,KN \\ R_C = 60\,KN \end{cases}$$

Determiniamo ora i valori delle caratteristiche della sollecitazione in tutti i punti utili per il disegno dei relativi diagrammi.

Per quanto attiene lo sforzo Normale si riconosce facilmente che sarà presente solo nel tratto **AE** della trave ed assumerà in questo tratto un valore costante e di compressione.

$$N_A^d = -R_{AX} = -30 \qquad N_E^s = -R_{AX} = -30 \qquad N_E^d = -R_{AX} + F_X = -30 + 30 = 0$$

Per poter disegnare i diagrammi del Taglio e del Momento occorre determinare i valori in tutte le sezioni dove sono applicate i carichi.

$$V_A = +R_{AY} = 15{,}981 \qquad M_A = 0$$

$$\begin{aligned} V_E^s &= V_A = 15{,}981 \\ V_E^d &= V_E^s - 51{,}962 = -35{,}981 \end{aligned} \qquad M_E = R_{AY} \cdot 3 = 15{,}981 \cdot 3 = 47{,}943$$

$$\begin{aligned} V_B^s &= V_E^d = -35{,}981 \\ V_B^d &= V_B^s + 95{,}981 = 60 \end{aligned} \qquad M_B = R_{AY} \cdot 6 - F_Y \cdot 3 = 15{,}981 \cdot 6 - 51{,}962 \cdot 3 = -60$$

$$V_D = V_B^d = 60 \qquad M_D = 0$$

$$V_C^s = -R_C = -60 \qquad M_B = 0$$

Il Momento in **A** ed in **C** sono nulli in quanto trattasi di sezioni terminali vincolate con appoggi o cerniere senza coppie concentrate applicate. Il Momento in **D** è nullo in quanto in una cerniera interna il Momento flettente deve essere nullo per le condizioni generali di equilibrio.

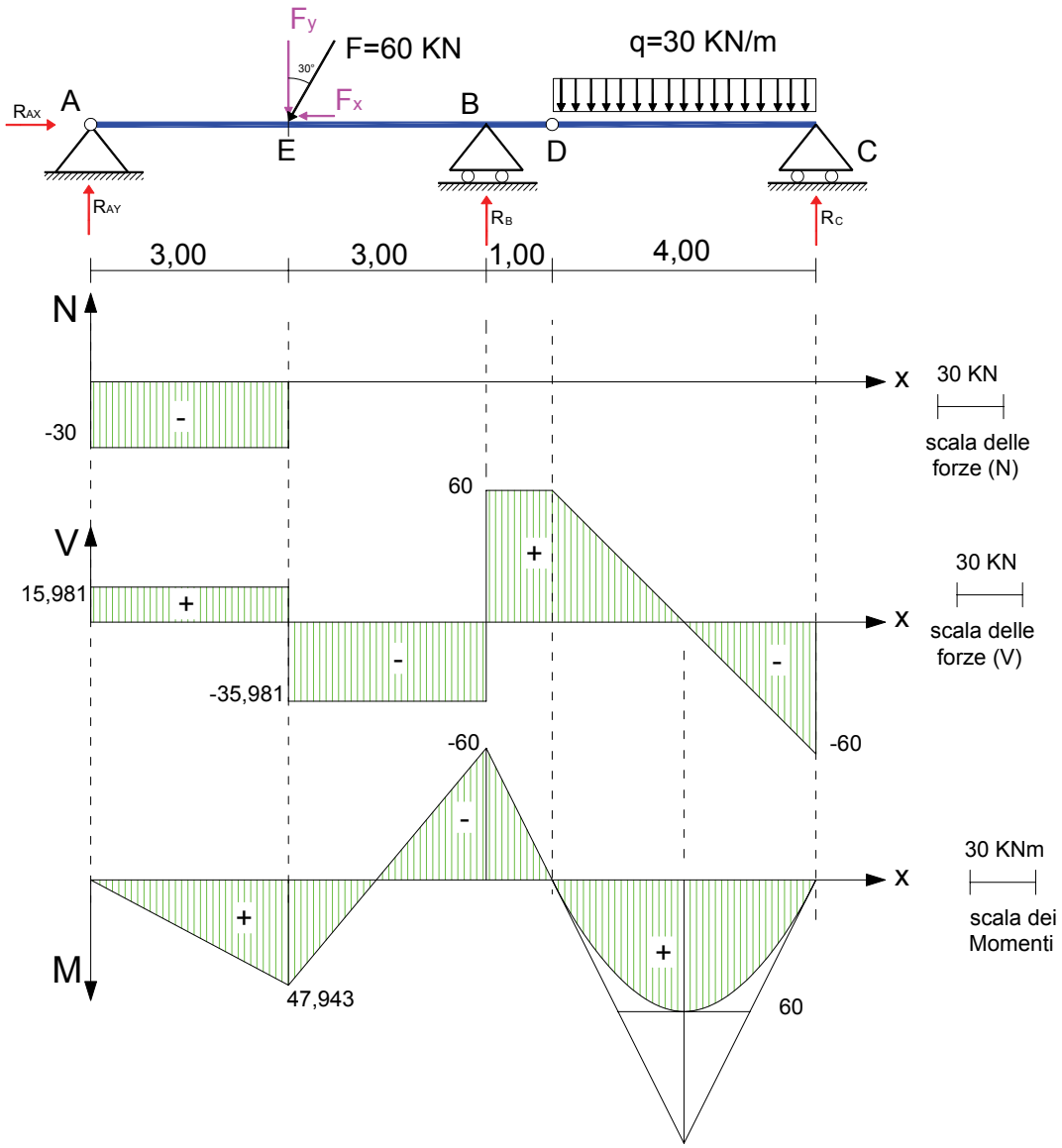
Per disegnare i diagrammi si procede dapprima con il taglio considerando che nei tratti dove non sono presenti carichi distribuiti il diagramma è costituito da tratti rettilinei costanti, mentre nel tratto **DC**, per la presenza del carico uniformemente distribuito il diagramma è rappresentato da un segmento di retta inclinato che si ottiene collegando i due valori del Taglio in **D** ed in **C**.

Il diagramma del momento è costituito da segmenti di retta nei tratti dove non è applicato il carico distribuito e da una parabola nel tratto **DC**. Per disegnare i tratti rettilinei basta collegare i valori del Momento nelle sezioni particolari già calcolate. Per disegnare la parabola nel tratto **DC** si deve considerare che in **D** la pendenza del diagramma del Momento è uguale sia per il tratto rettilineo **BD** sia per il tratto parabolico **DC**. La tangente in **D** si ottiene quindi prolungando il tratto del diagramma rettilineo **BD** fino ad intersecare la verticale per il punto medio del tratto **DC**. La tangente della parabola in **C** si ottiene congiungendo la proiezione del punto **B** sull'asse **x** di riferimento ($\mathbf{M_B}$=0) con l'intersezione prima determinata. Il punto medio dell'asse alla fondamentale **DC** rappresenta il punto dove la parabola raggiunge il suo massimo valore e la

tangente alla parabola in questo punto è parallela alla fondamentale (orizzontale). Tenendo conto dei tre punti determinati e delle tangenti si può disegnare la parabola.

Si può notare che il Momento massimo nel tratto **DC** è pari a $\frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{30 \cdot 4^2}{8} = 60$, infatti il diagramma parabolico in questo tratto è lo stesso che si avrebbe se il tratto **DC** fosse isolato e vincolato come una trave semplicemente appoggiata.

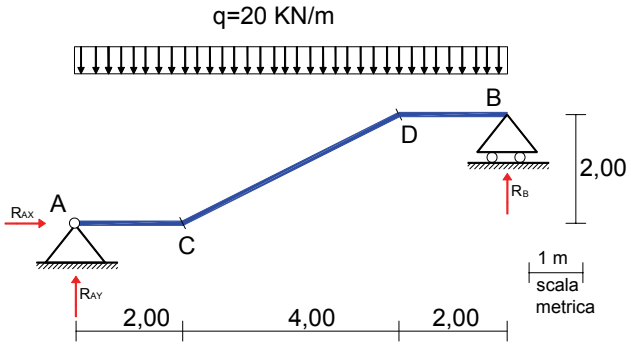
Si riportano i grafici con i diagrammi calcolati.



4.7.3 – Esempio strutturale n° 3 (trave tipica per una rampa di scale)

Questa struttura è stata già affrontata per il calcolo delle caratteristiche della sollecitazione in alcune sezioni particolari. In questo esercizio si la struttura viene risolta completamente fino a rappresentare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione ed i valori numerici delle sollecitazioni nelle sezioni più significative.

La struttura proposta, seppure abbastanza semplice, è costituita da tre tratti, di cui i due di estremità orizzontali ed il tratto centrale inclinato di un angolo α che si può facilmente determinare nel modo che segue:



$$\alpha = arctg\frac{2}{4} = 26°,56$$

Quando una struttura non è costituita da tutti tratti orizzontali, si usa rappresentare i diagrammi utilizzando come fondamentale proprio la rappresentazione geometrica della struttura, così da avere una diretta corrispondenza tra le sezioni ed il valore della caratteristica rappresentata che si leggerà nel disegno sempre lungo la direzione perpendicolare all'asse di riferimento.

Altra considerazione da fare è che nelle sezioni **C** e **D**, si dovranno calcolare la caratteristiche della sollecitazioni considerando l'appartenenza di queste sezioni sia a i tratti orizzontali e sia al tratto inclinato di trave, infatti sul tratto inclinato lo sforzo normale ed il taglio non corrisponderanno più alle forze lungo la direzione orizzontale e verticale, ma dovranno determinarsi le componenti delle forze lungo la direzione parallela e normale all'asse del tratto **CD**. Ma proseguiamo con ordine.

La soluzione dell'equilibrio esterno conduce ai seguenti valori delle reazioni vincolari:

$$R_{AX} = 0$$
$$R_{AY} = 80$$
$$R_b = 80$$

Le caratteristiche della sollecitazione nel tratto **AC**

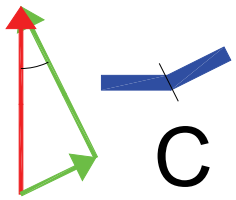
$$N_A = 0 \qquad V_A = +R_{AY} = 80 \qquad M_A = 0$$
$$N_C = 0 \qquad V_C = V_A - q \cdot 2 = 80 - 20 \cdot 2 = 40 \qquad M_C = 80 \cdot 2 - 20 \cdot \frac{2^2}{2} = 120$$

Le caratteristiche della sollecitazione nel tratto **DB**

$$N_B = 0 \qquad V_B = -R_B = -80 \qquad M_B = 0$$
$$N_D = 0 \qquad V_D = V_B + q \cdot 2 = -80 + 20 \cdot 2 = -40 \qquad M_D = 80 \cdot 2 - 20 \cdot \frac{2^2}{2} = 120$$

Le caratteristiche nel tratto **CD**

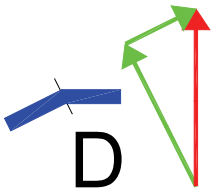
Il valore del momento nella sezione **C** e **D** non risente dell'inclinazione del tratto e quindi i valori saranno gli stessi calcolati tenendo conto dell'appartenenza delle sezioni considerate ai tratti orizzontali. Per quanto attiene invece al Taglio ed allo sforzo normale, si consideri lo schema riportato nella figura che segue. E' rappresentata la sezione **C** e la risultante di tutte le forze a sinistra di **C** che altro non è che il solo valore del Taglio in **C** calcolato considerando la sezione



appartenente al tratto orizzontale. Non è presente una componente di forza orizzontale poiché lo sforzo Normale in **C**, calcolato come appartenente al tratto orizzontale è nullo. Lo sforzo di Taglio e lo sforzo Normale in **C** considerata come sezione appartenente al tratto inclinato **CD** sarà ottenuto scomponendo la risultante delle forze a sinistra di **C** secondo la direzione parallela e normale al tratto **CD**. La componente parallela al tratto **CD** ci fornisce lo sforzo Normale mentre la componente normale corrisponde al Taglio. Considerati i versi rappresentati in figura si ha che il Taglio è positivo mentre lo sforzo Normale è negativo. I valori di **N** e di **V** sono determinati con le seguenti espressioni considerando che l'angolo **α** tra la risultante, in rosso, e la normale all'asse del tratto **CD** è pari proprio all'angolo che il tratto **CD** forma con l'orizzontale.

$$N_C = -40 \cdot sen26°,56 = -17,885$$
$$V_C = 40 \cdot \cos 26°,56 = 35,779$$

Analogamente a quanto fatto nella sezione C si opera nella sezione D ottenendo i risultati appresso riportati.



$$N_D = 40 \cdot sen26°,56 = 17,885$$
$$V_D = -40 \cdot \cos 26°,56 = -35,779$$

Per la determinazione dei segni si consideri che la forza rappresentata in rosso nel disegno rappresenta la risultante di tutte le forze a destra della sezione D, quindi per la convenzione dei segni delle sollecitazioni si ha che la componente parallela all'asse della trave determina uno sforzo normale di trazione e quindi positivo, mentre la componente ortogonale all'asse della trave ci fornisce un valore di taglio negativo.

Calcolati tutti valori delle sollecitazioni necessari, si passa al disegno dei diagrammi. Lo sforzo normale sarà presente solo nel tratto inclinato e il diagramma sarà rappresentato da un segmento di retta che si ottiene congiungendo i valori di **N** in **C** ed in **D**. Il diagramma sarà lineare in quanto secondo la direzione dell'asse della trave nel tratto **CD** agisce una componente assiale del carico distribuito.

Il diagramma del taglio sarà costituito da tratti lineari che si ottengono semplicemente unendo i valori del Taglio nelle sezioni particolari, avendo cura però di rappresentare questi valori in direzione ortogonale all'asse del tratto di trave considerato.

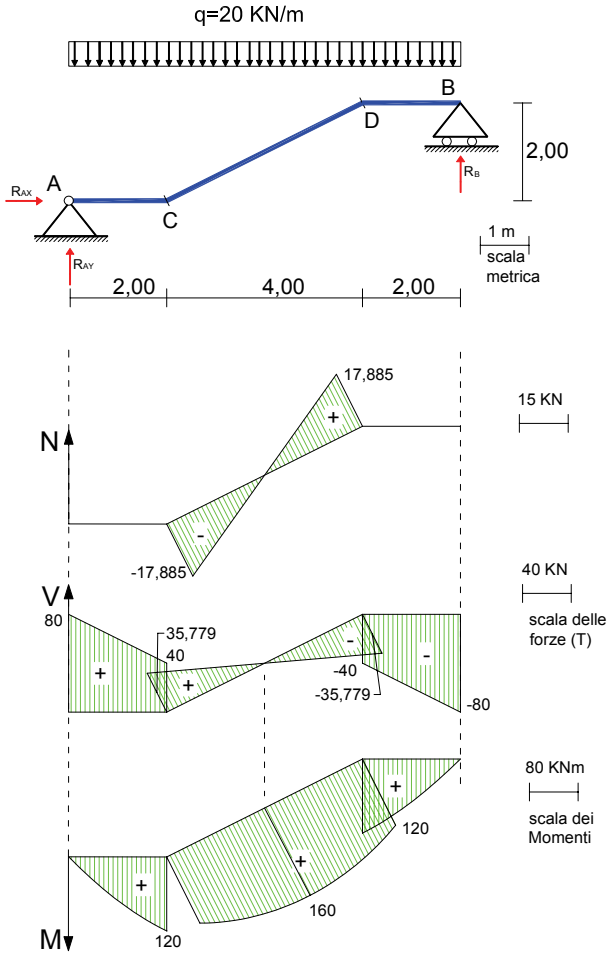
Il disegno del diagramma del Momento è un po' più articolato. Lungo tutta la struttura il diagramma deve essere costituito da tratti parabolici. In particolare nei tratti orizzontali le parabole possono essere costruite considerando i tratti appartenenti ad una trave orizzontale soggetta al carico applicato q e lunga quanto la proiezione orizzontale della trave composta invece da più tratti. La parabola lungo il tratto inclinato sarà invece ottenuta considerando i valori

calcolati agli estremi ed il valore del Momento massimo che si verifica nella sezione dove il taglio è nullo, nello specifico nella mezzeria del tratto inclinato. Il momento massimo è pari a:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = 20 \cdot \frac{8^2}{8} = 160\,.$$

Raddoppiando la lunghezza in scala del segmento che lo rappresenta si ottiene il punto nel quale convergono le tangenti alla parabola in C ed in D. Si può quindi proseguire nella costruzione grafica della parabola.

Si riporta appresso la rappresentazione grafica completa dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.



Facciamo alcune osservazioni.

Nei tratti orizzontali il carico non ha componenti lungo l'asse della trave, infatti lo sforzo Normale risulta costante ed in particolare nullo in questi tratti. Il taglio nei tratti orizzontali è lineare di pendenza pari proprio a **q**, mentre nel tratto inclinato il diagramma presenta una pendenza diversa, essendo diversa la componente perpendicolare del carico. Valutiamo le componenti assiale e normale del carico **q** lungo il tratto **CD** inclinato dell'angolo α=26°,56.

$$q_Y = q \cdot \cos 26°,56 = 20 \cdot \cos 26°,56 = 17,889$$
$$q_X = q \cdot sen 26°,56 = 20 \cdot sen 26°,56 = 8,943$$

La lunghezza del tratto inclinato **CD** è pari a $L = \dfrac{4}{\cos 26°,56} = 4,47$

Le componenti del carico prima determinate sono riferite ad uno sviluppo orizzontale di 4 m mentre se li riferiamo allo sviluppo lungo la lunghezza del tratto inclinato sono:

$$q_Y^1 = \frac{q_Y \cdot 4}{4,47} = \frac{17,889 \cdot 4}{4,47} = 16,01 \qquad q_X^1 = \frac{q_X \cdot 4}{4,47} = \frac{8,943 \cdot 4}{4,47} = 8,00$$

La pendenza del diagramma dello sforzo Normale può calcolarsi nel seguente modo:

$$i = \frac{17,889 - (-17,889)}{4,47} = \frac{35,778}{4,47} = 8,00$$

Come si vede la pendenza del diagramma dello sforzo Normale è pari proprio alla componente assiale del carico distribuito.

La pendenza del diagramma del taglio nello stesso tratto è pari a :

$$i = \frac{35,779 - (-35,779)}{4,47} = \frac{71,558}{4,47} = 16,01$$

La pendenza del diagramma del Taglio è pari al valore della componente ortogonale del carico distribuito.

Il valore del Momento massimo nella sezione di Mezzeria del tratto inclinato è stato prima determinato considerando il valore del carico verticale e assimilando la struttura ad una trave semplice, ma può essere determinato anche considerando lo sviluppo lungo l'asse inclinato del Tratto **CD**. Si ha infatti che il Momento nella sezione di mezzeria potrà calcolarsi nel seguente modo:

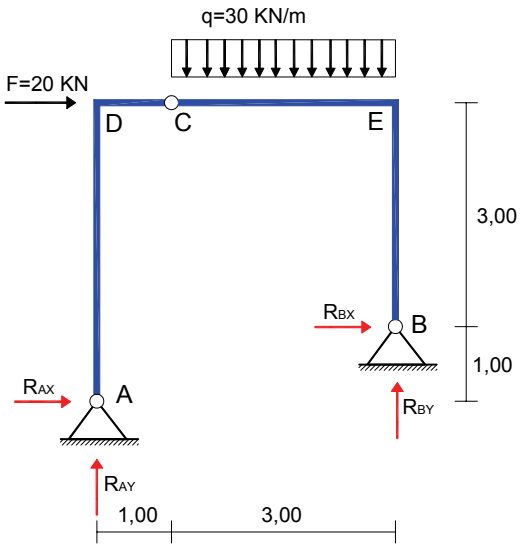
$$M_{MAX} = M_C + V_C \cdot \frac{4,47}{2} - q_Y^1 \cdot \frac{4,47}{2} \cdot \frac{4,47}{4} = 120 + 35,779 \cdot \frac{4,47}{2} - 16,01 \cdot \frac{4,47^2}{8} \cong 160$$

Come si vede il valore del momento massimo ottenuto è, a meno degli arrotondamenti numerici, pari proprio a quello di una trave semplice di luce pari alla proiezione orizzontale della struttura considerata e soggetta allo stesso carico distribuito q.

4.7.4 Esempio numerico n° 4 (il portale)

Come ultimo esempio di struttura viene qui risolto un portale. La particolarità di questi tipi di struttura è data dalla impossibilità di rappresentare lungo una stessa linea fondamentale tutti i diagrammi per tutti i tratti strutturali. Si potrebbero senz'altro rappresentare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione considerando separatamente i singoli tratti, ma così facendo si perderebbe quella visione globale che risulta sempre molto utile nell'analisi delle strutture. Proprio per favorire questa visione globale si preferisce disegnare i diagrammi delle sollecitazioni facendo riferimento allo stesso schema strutturale, così che si abbia una diretta corrispondenza tra la sezione strutturale ed i valori delle singole caratteristiche della sollecitazione. Per poter

fissare in maniera non equivoca i sistemi di riferimento si considereranno per i tratti verticale le ascisse crescenti dal basso verso l'alto, mentre per i tratti orizzontali od inclinati, le ascisse crescenti procedendo da sinistra verso destra. Con la soluzione dell'esercizio proposto potrà risultare tutto più chiaro.



Con i versi delle reazioni vincolari ipotizzati positivi nello schema strutturale, impostiamo il sistema risolutivo dell'equilibrio esterno.

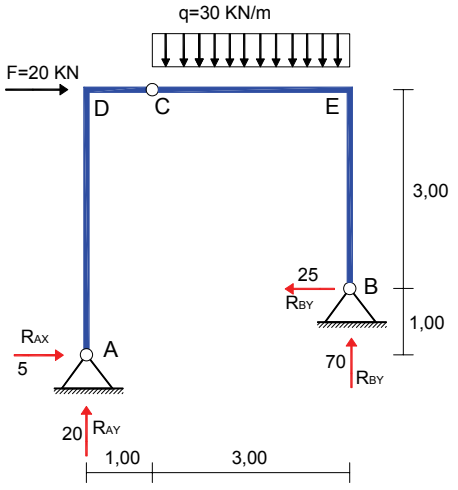
$$\begin{cases} R_{AY}+R_{BY}-q\cdot 3=0 \\ R_{AX}+F+R_{BX}=0 \\ F\cdot 4+q\cdot 3\cdot 2{,}5+R_{BX}\cdot 1-R_{BY}\cdot 4=0 \\ q\cdot 3\cdot 1{,}5-R_{BX}\cdot 3-R_{BY}\cdot 3=0 \end{cases}$$

Le prime due equazioni esprimono l'equilibrio alla traslazione verticale ed orizzontale, la terza equazione esprime l'equilibrio alla rotazione dell'intera struttura intorno al punto A, mentre la quarta equazione è la cosiddetta equazione ausiliaria che esprime la condizione di equilibrio per la cerniera interna.

$$\begin{cases} R_{AY}+R_{BY}=30\cdot 3 \\ R_{AX}+R_{BX}=-20 \\ R_{BX}\cdot 1-R_{BY}\cdot 4=-20\cdot 4-30\cdot 3\cdot 2{,}5 \\ -R_{BX}\cdot 3-R_{BY}\cdot 3=-30\cdot 3\cdot 1{,}5 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{AY}+R_{BY}=90 \\ R_{AX}+R_{BX}=-20 \\ R_{BX}-R_{BY}\cdot 4=-305 \\ R_{BX}+R_{BY}=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AY}+R_{BY}=90 \\ R_{AX}+R_{BX}=-20 \\ R_{BX}-R_{BY}\cdot 4=-305 \\ R_{BX}=45-R_{BY} \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{AY}+R_{BY}=90 \\ R_{AX}+R_{BX}=-20 \\ 45-R_{BY}-R_{BY}\cdot 4=-305 \\ R_{BX}=45-R_{BY} \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{AY}+R_{BY}=90 \\ R_{AX}+R_{BX}=-20 \\ R_{BY}=\dfrac{305+45}{5}=70 \\ R_{BX}=45-70=-25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AY}=90-70=20 \\ R_{AX}=-20+25=5 \\ R_{BY}=70 \\ R_{BX}=-25 \end{cases}$$



Risolto il problema dell'equilibrio esterno ridisegniamo lo schema della struttura con i versi delle reazioni vincolari scaturiti dalla soluzione dell'equilibrio esterno, e facendo riferimento a questo schema calcoliamo i valori delle caratteristiche della sollecitazione nelle sezioni particolari utili al disegno dei diagrammi.

Tratto verticale AD

$$V_A = -R_{AX} = -5 \qquad N_A = -R_{AY} = -20 \qquad M_A = 0$$
$$V_D = -5 \qquad N_D = -20 \qquad M_D = -R_{AX} \cdot 4 = -5 \cdot 4 = -20$$

Nel tratto **AD** i diagrammi del Taglio e dello sforzo Normale saranno costanti mentre il diagramma del Momento sarà di tipo lineare.

Tratto orizzontale DCE

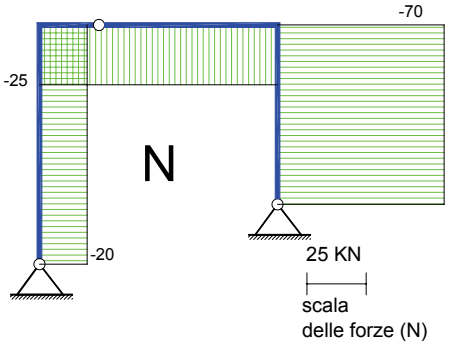
$$V_D = R_{AY} = 20 \qquad N_D = -R_{AX} - F = -5 - 20 = -25 \qquad M_D = -20$$
$$V_C = 20 \qquad N_C = -25 \qquad M_C = 0$$
$$V_D = V_C - 3 \cdot q = -70 \qquad N_C = -25 \qquad M_C = V_C \cdot 3 - q \cdot \frac{3^2}{2} = -75$$

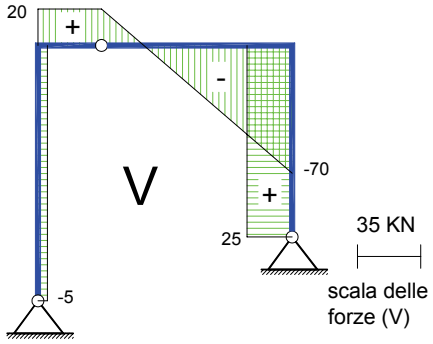
Nel tratto orizzontale lo sforzo Normale si mantiene costante mentre il Taglio presenterà un segmento costante nel tratto **DC** e poi lineare sotto il carico q. Il diagramma del Momento sarà costituito da un tratto lineare tra **D** e **C** e da un tratto parabolico sotto il carico q; la parabola può essere costruita considerando che il tratto lineare in **DC** rappresenta la tangente alla parabola in **C** e che la tangente in E potrà ottenersi collegando il valore di **M** in **E** con l'intersezione tra la prima tangente e la verticale per il punto medio del segmento che congiunge i valori di $\mathbf{M}_C$ e $\mathbf{M}_E$.

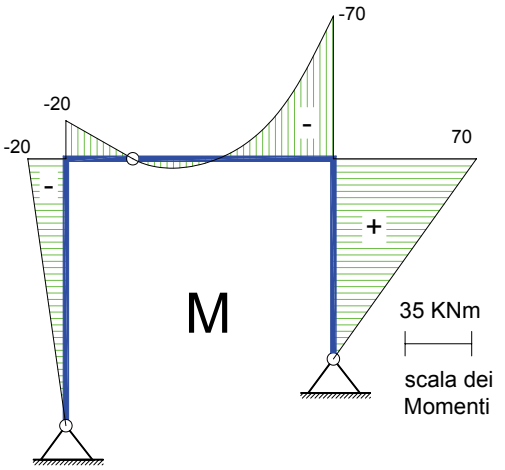
Tratto verticale BE

$$V_B = +R_{BX} = 25 \qquad N_B = -R_{BY} = -70 \qquad M_B = 0$$
$$V_E = 25 \qquad N_E = -70 \qquad M_E = R_{BX} \cdot 3 = 25 \cdot 3 = 75$$

Nel tratto verticale BE lo sforzo normale si mantiene costante e così anche il diagramma del Taglio; il diagramma del momento è invece di tipo lineare.

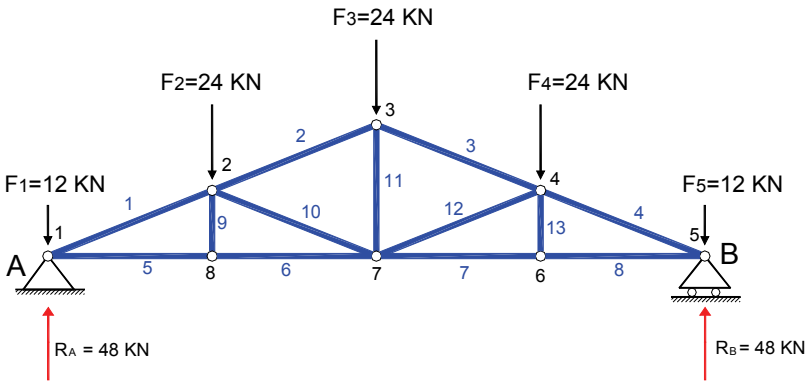






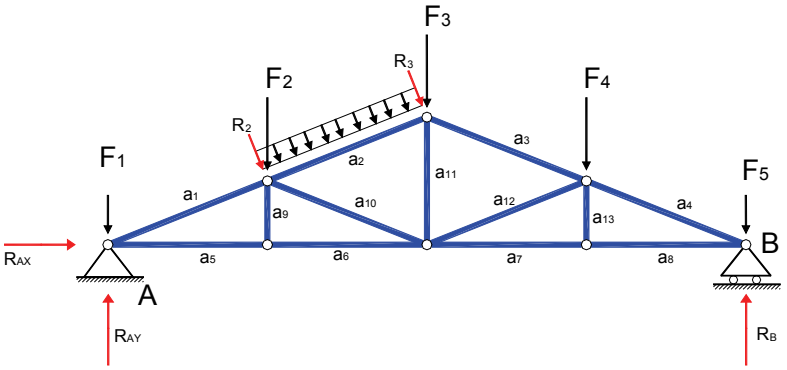
5 – Le Travature Reticolari

Le travature reticolari sono quelle strutture composte da aste collegate tra loro in modo che possano trasferire esclusivamente sforzi Normali. In pratica come abbiamo già visto nella trattazione del problema dell'equilibrio esterno, si intende per struttura reticolare una struttura, generalmente isostatica, costituita da travi collegate tra loro attraverso cerniere interne. Abbiamo già visto che se la travatura fosse costituita da maglie di forma triangolare, questa può intendersi internamente isostatica, e quindi possiede esternamente tre gradi di libertà nel piano da sopprimere con vincoli esterni, solitamente un carrello ed una cerniera esterna.



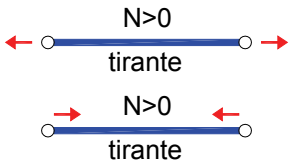
Se la struttura risulta caricata esternamente solo da forze concentrate sulle cerniere interne, in ogni asta che compone la struttura, l'unica caratteristica di sollecitazione non nulla sarà lo sforzo normale. In queste ipotesi, infatti, se immaginiamo di isolare un nodo con le aste che in esso concorrono, queste sarebbero libere di ruotare e pertanto, affinchè il nodo sia equilibrato, il momento flettente nelle aste deve essere nullo. Ovviamente anche il taglio è nullo essendo nullo il momento flettente. L'equilibrio del nodo si può avere, in questo caso, con soli sforzi che agiscano nella direzione delle aste (sforzo Normale).

Nel caso che qualche forza esterna sia applicata non sui nodi ma su un'asta, la cerniera interna che collega le aste concorrenti nel nodo impedisce il trasferimento del momento alle altre aste concorrenti nel nodo le quali risulteranno ancora soggette esclusivamente a sforzo normale. L'asta sulla quale agiscono forze o carichi distribuiti, si comporterà come una trave semplicemente appoggiata ai nodi di estremità e presenterà il relativo diagramma di momento e taglio. Sui nodi di estremità dell'asta caricata si aggiungeranno alla trave reticolare le forze corrispondenti alle



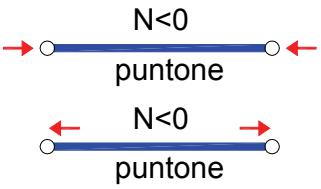
reazioni vincolari dell'asta cambiate di verso. Con la soluzione della travatura reticolare si determinano gli sforzi normali che agiscono in ogni asta costituente la struttura.

Le aste che risultano soggette da uno sforzo normale di trazione (N>0) si definiscono **tiranti**, mentre le aste sollecitate da sforzo di compressione (N<0) si definiscono **puntoni**.



Un asta è soggetta a trazione quando alle sue estremità agiscono su di essa forze che tendono ad allungare l'asta; se consideriamo che su un asta di travatura reticolare le forze sono a questa trasferite dai nodi, possiamo dire che un'asta è soggetta a trazione quando i nodi di estremità trasferiscono su di essa forze che tendono ad allungarla.

Per l'equilibrio del nodo, l'asta deve reagire con una forza uguale e contraria a quella che il nodo trasferisce all'asta, e cioè deve esercitare sul nodo una forza con verso che dal nodo punti l'interno dell'asta.



Un puntone, essendo soggetto a sforzo di compressione, è tale quando i nodi di estremità trasferiscono su di esso forze che tendono ad accorciarlo. Per l'equilibrio del nodo il puntone reagirà quindi sul nodo con una forza uguale e contraria e cioè con verso che fuoriesce dall'asta.

Il problema dell'equilibrio interno per le strutture reticolari si concretizza nel trovare il valore che lo sforzo normale assume in ogni asta costituente la struttura. Se la struttura reticolare è isostatica (costituita da tutte maglie triangolari), nella soluzione del problema si può trascurare la deformazione che le aste subiscono per effetto dello sforzo Normale trasferito dai nodi e possono essere considerate come inestensibili. Con tale posizione, la ricerca degli sforzi normali agenti sulle aste può essere condotta utilizzando esclusivamente condizioni di equilibrio.

Diversi sono i metodi che consentono di risolvere le travature reticolari, alcuni analitici e altri grafici, tra questi i principali sono:

- Il metodo degli equilibri dei nodi
- Il metodo delle sezioni di Ritter

5.1 - L'equilibrio dei nodi

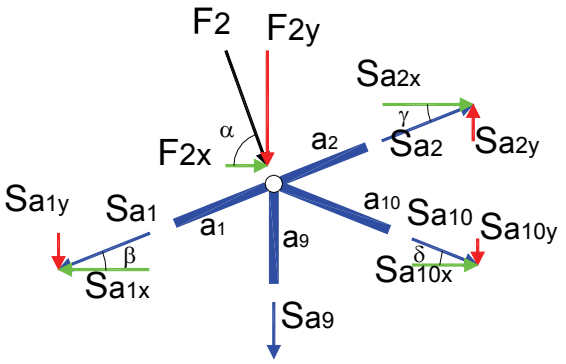
La soluzione delle travature reticolari attraverso l'equilibrio dei nodi, consiste nella scrittura delle equazioni che esprimono l'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale di ogni nodo della travatura. Le equazioni che si ottengono sono in numero pari proprio alle incognite (sforzo normale nella aste + reazioni vincolari) e costituiscono un sistema di equazioni lineari che, risolto, fornisce la soluzione della struttura reticolare.

Prendendo in considerazione un nodo generico **i** di una travatura reticolare, detto **F**i la forza esterna applicata sul nodo e **S**i lo sforzo normale agente in ogni asta che concorre nel nodo, le equazioni di equilibrio alla traslazione del nodo si scrivono:

$$F_{ix} + \sum S_{ix} = 0$$
$$F_{iy} + \sum S_{iy} = 0$$

dove con il pedice x e y si indicano rispettivamente le componenti orizzontali e verticali delle forze agenti sul nodo.

Consideriamo un esempio di nodo di travatura reticolare ed esplicitiamo le equazioni di equilibrio.



$$\begin{cases} F_{2x} + S_{a2x} + S_{a10x} - S_{a1x} = 0 \\ -F_{2y} + S_{a2y} - S_{a10y} - S_{a9} - S_{a1y} = 0 \end{cases}$$

Le componenti degli sforzi nelle aste sono state determinate considerando i versi derivanti da sforzi di trazione (positivi) nelle aste, mentre i segni assunti nell'equazione sono riferite al sistema di riferimento assunto per le forze (positive da sinistra a destra e dal basso verso l'alto).

Poiché le componenti orizzontali e verticali degli sforzi sono legate agli sforzi normali attraverso le relazioni trigonometriche:

$$S_{ix} = S_i \cdot \cos\alpha_i \,; \qquad S_{iy} = S_i \cdot sen\alpha$$

nelle 2 equazioni di equilibrio del nodo considerato compaiono 4 incognite costituite dagli sforzi normali delle aste concorrenti nel nodo.

Scrivendo le equazioni analoghe di equilibrio per ogni nodo, si ottiene un numero di equazioni pari proprio alle incognite del problema.

In una struttura reticolare isostatica composta da **n** nodi il numero delle aste è pari **2n-3**; Le incognite del problema di equilibrio è costituito dagli sforzi normali nelle aste e dalle tre reazioni vincolari esterne, quindi il numero delle incognite totale del problema è pari **2n-3+3 = 2n**.

Poiché il numero dei nodi è pari a **n** e per ogni nodo possiamo scrivere due equazioni di equilibrio alla traslazione, il numero delle equazioni che costituisce il sistema è pari proprio a **2n**.

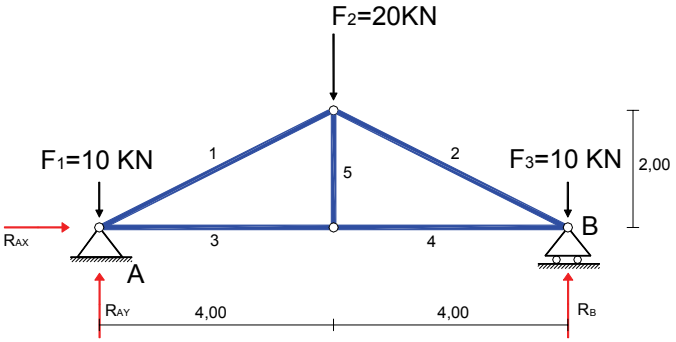
5.1.1 – Esempio numerico n° 1 (Capriata semplice)

Consideriamo la travatura reticolare riportata appresso in figura e scriviamo le equazioni di equilibrio dei nodi che permettono di risolvere la struttura.

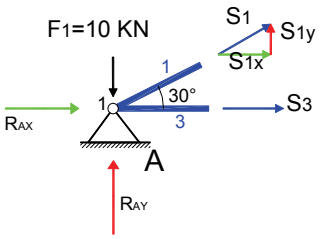
Sia i nodi che le aste sono state numerate cosicché le espressioni simboliche delle equazioni risultino più semplici.

Le aste 3 e 4 risultano orizzontali e l'asta 5 verticale. L'angolo che l'asta 1 forma con l'orizzontale

è pari a 30°, infatti si ha che: $\alpha = arctg\frac{2}{4} = 30°$. Ovviamente anche l'angolo β rappresentato in figura è pari a 30°. La geometria del sistema risulta quindi definita e si può passare a scrivere le equazioni in ogni nodo.

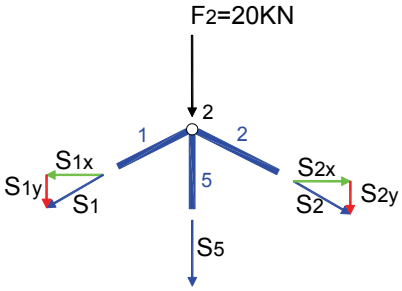


Equilibrio del nodo 1



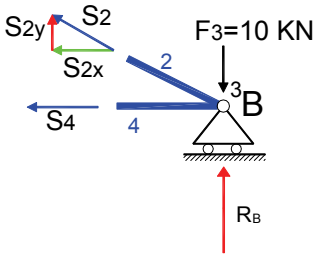
$$\begin{cases} R_{AX} + S_1 \cdot \cos 30° + S_3 = 0 \\ R_{AY} - 10 + S_1 \cdot sen30° = 0 \end{cases}$$

Equilibrio del nodo 2



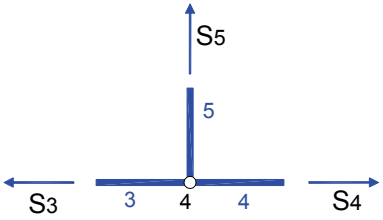
$$\begin{cases} -S_1 \cdot \cos 30° + S_2 \cdot \cos 30° = 0 \\ -S_1 \cdot sen30° - 20 - S_2 \cdot sen30° - S_5 = 0 \end{cases}$$

Equilibrio del nodo 3



$$\begin{cases} -S_4 - S_2 \cdot \cos 30° = 0 \\ +S_2 \cdot sen30° - 10 + R_B = 0 \end{cases}$$

Equilibrio del nodo 4



$$\begin{cases} -S_3 + S_4 = 0 \\ S_5 = 0 \end{cases}$$

A questo punto non resta da fare altro che assemblare tutto il sistema di equazioni e trovare la soluzione.

$$\begin{cases} R_{AX} + S_1 \cdot \cos 30° + S_3 = 0 \\ R_{AY} - 10 + S_1 \cdot sen30° = 0 \\ - S_1 \cdot \cos 30° + S_2 \cdot \cos 30° = 0 \\ - S_1 \cdot sen30° - 20 - S_2 \cdot sen30° - S_5 = 0 \\ - S_4 - S_2 \cdot \cos 30° = 0 \\ + S_2 \cdot sen30° - 10 + R_B = 0 \\ - S_3 + S_4 = 0 \\ S_5 = 0 \end{cases}$$

Dalla 3° 4° e 8° equazione si ricavano S_1 e S_2 e sostituendo i valori trovati nella altre equazioni si ricavano le rimanenti incognite.

$$\begin{cases} R_{AX} + S_1 \cdot \cos 30° + S_3 = 0 \\ R_{AY} - 10 + S_1 \cdot sen30° = 0 \\ - S_1 \cdot \cos 30° + S_2 \cdot \cos 30° = 0 \\ - S_1 \cdot sen30° - 20 - S_2 \cdot sen30° - S_5 = 0 \\ - S_4 - S_2 \cdot \cos 30° = 0 \\ + S_2 \cdot sen30° - 10 + R_B = 0 \\ - S_3 + S_4 = 0 \\ S_5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{AX} + S_1 \cdot \cos 30° + S_3 = 0 \\ R_{AY} - 10 + S_1 \cdot sen30° = 0 \\ S_1 = S_2 \\ - 2 \cdot S_1 = 20 \;\Rightarrow\; S_1 = -10 \\ - S_4 - S_2 \cdot \cos 30° = 0 \\ + S_2 \cdot sen30° - 10 + R_B = 0 \\ - S_3 + S_4 = 0 \\ S_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{AX} - 10 \cdot \cos 30° + S_3 = 0 \\ R_{AY} - 10 - 10 \cdot sen30° = 0 \\ S_2 = -10 \\ S_1 = -10 \\ - S_4 + 10 \cdot \cos 30° = 0 \\ - 10 \cdot sen30° - 10 + R_B = 0 \\ - S_3 + S_4 = 0 \\ S_5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{AX} = +10 \cdot \cos 30° - 8{,}66 = 0 \\ R_{AY} = 10 + 10 \cdot sen30° = 15 \\ S_2 = -10 \\ S_1 = -10 \\ S_4 = +10 \cdot \cos 30° = 8{,}66 \\ + R_B = +10 \cdot sen30° + 10 = 15 \\ S_3 = S_4 = 8{,}66 \\ S_5 = 0 \end{cases}$$

Tutte le incognite sono state risolte.

Le aste con sforzo Normale positivo sono effettivamente dei tiranti come ipotizzato nella scritture delle equazioni di equilibrio, mentre le aste con sforzo Normale negativo saranno dei puntoni.

Si riportano appresso il riepilogo dei risultati ottenuti.

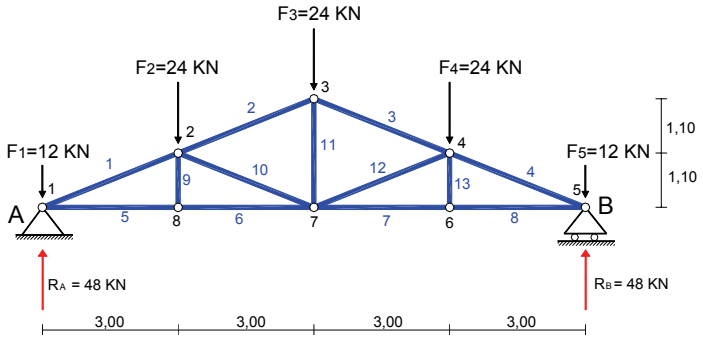
Asta	N	Tipo
1	**-10 KN**	Puntone
2	**-10 KN**	Puntone
3	**+8,66 KN**	Tirante
4	**+ 8,66 KN**	Tirante
5	**0 KN**	------

Nel caso analizzato la struttura era composta da pochi nodi e la soluzione del sistema è stata abbastanza agevole, se però la struttura da analizzare fosse costituita da molti nodi si renderebbe opportuno utilizzare un apposito software per la soluzione del sistema.

Nella maggioranza dei casi si può però agevolmente risolvere la struttura utilizzando le equazioni dell'equilibrio esterno per determinare le reazioni vincolari esterne e le equazioni dell'equilibrio dei nodi per determinare gli sforzi nelle aste.

5.1.2 – Esempio numerico n° 2 (Capriata Inglese)

Prendiamo in considerazione la capriata riportata in figura e determiniamo le reazioni vincolari attraverso le equazioni cardinali della statica.



Poiché la struttura è caricata solo da forze verticali la componente orizzontale della reazione vincolare della cerniera in **A** è nulla.

Dall'equilibrio alla rotazione intorno ad A si ricava la reazione vincolare $\mathbf{R}_B$.

$$24\cdot 3+24\cdot 6+24\cdot 9+12\cdot 12-R_B\cdot 12=0 \quad\Rightarrow\quad R_B=\frac{24\cdot 3+24\cdot 6+24\cdot 9+12\cdot 12}{12}=48$$

Dall'equilibrio alla traslazione verticale ricaviamo $\mathbf{R}_A$.

$$R_A-12-24-24-24-12+48=0 \quad\Rightarrow\quad R_A=-48+12+24+24+24+12=48$$

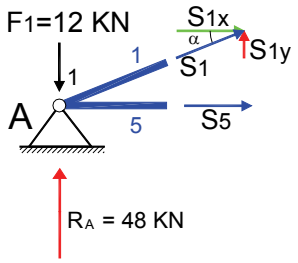
La struttura è simmetrica e simmetricamente caricata e pertanto le due reazioni vincolari sono uguali e pari proprio alla metà del carico applicato. Per la simmetria della struttura anche gli sforzi nelle aste simmetricamente disposte saranno uguali e pertanto basterebbe risolvere solo metà della struttura per conoscere gli sforzi anche nelle aste dell'altra metà.

Ma proseguiamo con ordine e passiamo a trattare gli equilibri dei singoli nodi costituenti la struttura reticolare. Dalla geometria della trave ricaviamo gli angoli di inclinazione del corrente superiore e delle diagonali interne.

Le aste **1,2,3,4** così come anche le diagonali **10** e **12** formano con la direzione orizzontale l'angolo: $\alpha = arctg\dfrac{1{,}10}{3{,}00} = 20°{,}1363.$

Scriviamo le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale nel nodo **1** della travatura.

Equilibrio del nodo 1



$$\begin{cases} S_{1x} + S_5 = 0 \\ R_A - F_1 + S_{1y} = 0 \end{cases}$$

Nel sistema che abbiamo scritto compaiono solo due incognite, gli sforzi nelle aste 1 e 5, infatti abbiamo già provveduto a calcolare la reazione $\mathbf{R}_A$ attraverso le relazioni che regolano l'equilibrio esterno. Il sistema è quindi risolvibile.

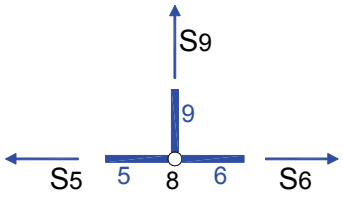
$$\begin{cases} S_1 \cdot \cos 20{,}1363 + S_5 = 0 \\ 48 - 12 + S_1 \cdot sen\, 20{,}1363 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_5 = \dfrac{104{,}574}{\cos 20{,}1363} = 111{,}382 \\ S_1 = \dfrac{12 - 48}{sen\, 20{,}1363} = -104{,}574 \end{cases}$$

Se le equazioni di equilibrio dei nodi si applicano a nodi nei convergono due sole aste con sforzi incogniti le equazioni sono risolvibili e ci permettono di determinare direttamente i due sforzi incogniti.

Osservando la struttura si nota che se ora andassimo a scrivere l'equilibrio del nodo **2**, avremmo tre incognite, infatti è già stato calcolato lo sforzo nell'asta **1** ma risulterebbero incogniti gli sforzi nelle aste **2**, **9** e **10**, quindi il sistema non sarebbe sufficiente essendo composto da due equazioni contenenti tre incognite non potrebbe essere risolto.

Se scrivessimo l'equilibrio del nodo **8**, invece, avremmo solo due incognite, gli sforzi nelle aste **9** e **6**, avendo già determinato lo sforzo nell'asta **5**; il sistema è risolvibile.

Equilibrio del nodo 8



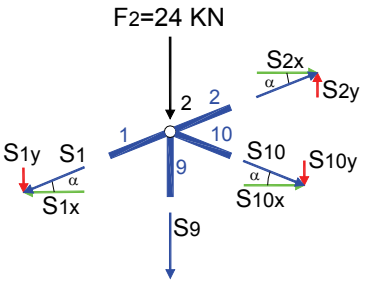
$$\begin{cases} -S_5 + S_6 = 0 \\ S_9 = 0 \end{cases}$$

Lo sforzo dell'asta **9** è nullo, mentre lo sforzo nell'asta **6** si ricava dalla 1° equazione essendo già noto lo sforzo nell'asta **5**.

$$\begin{cases} -111{,}382 + S_6 = 0 \\ S_9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_6 = 111{,}382 \\ S_9 = 0 \end{cases}$$

Possiamo ora passare risolvere l'equilibrio del nodo **2**, infatti poiché è ormai noto lo sforzo nelle aste **1** e **9**, restano incogniti i soli sforzi nelle aste **3** e **11**.

Equilibrio del nodo 2



$$\begin{cases} -S_{1x} + S_{2x} + S_{10x} = 0 \\ -S_9 - S_{1y} - F_2 + S_{2y} - S_{10y} = 0 \end{cases}$$

Sostituendo i valori degli sforzi noti si ottengono i due sforzi incogniti.

$$\begin{cases} 104{,}574 \cdot \cos 20{,}1363 + S_2 \cdot \cos 20{,}1363 + S_{10} \cdot \cos 20{,}1363 = 0 \\ 104{,}574 \cdot sen\, 20{,}1363 - 24 + S_2 \cdot sen\, 20{,}1363 - S_{10} \cdot sen\, 20{,}1363 = 0 \end{cases}$$

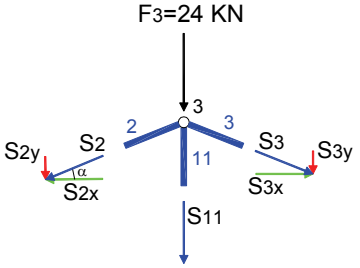
$$\begin{cases} S_{10} = -104{,}574 - S_2 \\ 104{,}574 \cdot sen\, 20{,}1363 - 24 + S_2 \cdot sen\, 20{,}1363 - \left(-104{,}574 - S_2\right) \cdot sen\, 20{,}1363 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{10} = -104{,}574 - S_2 \\ 36 - 24 + S_2 \cdot sen\, 20{,}1363 + 36 + S_2 \cdot sen\, 20{,}1363 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{10} = -104{,}574 + 17{,}429 = -87{,}145 \\ S_2 = \dfrac{24 - 36}{2 \cdot sen\, 20{,}1363} = -17{,}429 \end{cases}$$

Ora si può passare all'equilibrio del nodo **3**.

Equilibrio del nodo 3



$$\begin{cases} -S_{2x} + S_{3x} = 0 \\ -S_{2y} - F_3 - S_{3y} - S_{11} = 0 \end{cases}$$

Sostituendo i valori già noti risolviamo il sistema di equazioni.

$$\begin{cases} 17{,}429 \cdot \cos 20{,}1363 + S_3 \cdot \cos 20{,}1363 = 0 \\ 17{,}429 \cdot sen\, 20{,}1363 - 24 - S_3 \cdot sen\, 20{,}1363 - S_{11} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_3 = -17{,}429 \\ 17{,}429 \cdot sen\, 20{,}1363 - 24 + 17429 \cdot sen\, 20{,}1363 - S_{11} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_3 = -17{,}429 \\ 17{,}429 \cdot sen\, 20{,}1363 - 24 + 17{,}429 \cdot sen\, 20{,}1363 - S_{11} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_3 = -17{,}429 \\ S_{11} = 17{,}429 \cdot sen\, 20{,}1363 - 24 + 17{,}429 \cdot sen\, 20{,}1363 = -12{,}000 \end{cases}$$

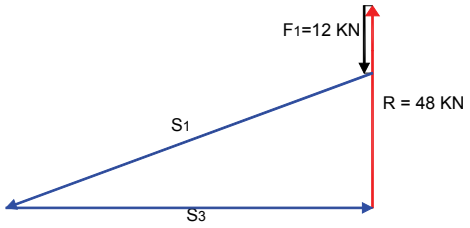
Come dovevamo aspettarci, dato la simmetria dello schema strutturale, le aste 2 e 3 sono soggette allo stesso sforzo Normale. Analogamente risulteranno uguali gli sforzi di tutte le aste rispettivamente simmetriche. La struttura può ritenersi risolta.

Vengono riassunti i risultati degli sforzi nelle singole aste.

Asta	N	Tipo
1 - 4	**-104,574 KN**	Puntone
2 - 3	**-17,429 KN**	Puntone
5 - 8	**+111,382 KN**	Tirante
6 - 7	**+111,382 KN**	Tirante
9 - 13	**0 KN**	------
10 - 12	**- 87,145 KN**	Puntone
11	**- 12,000 KN**	Puntone

Il metodo dell'equilibrio dei noti, così come proposto in questo esempio, può essere anche applicato per via grafica. Scelta un'opportuna scala grafica, l'equilibrio del nodo nel quale compaiono due sforzi incogniti può realizzarsi costruendo il poligono delle forze concorrenti nel nodo. A titolo di esempio si effettua l'equilibrio del nodo 1.

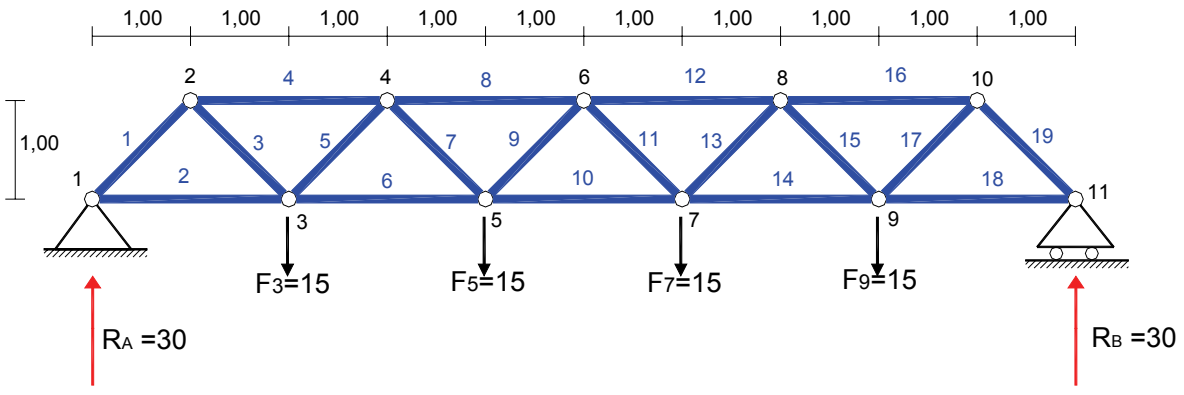
Si disegnano in seguenza la reazione RA e la forza F1 e si completa poi tracciando le parallele all'asta 1 e all'asta 3. Il verso degli sforzi è quello che chiude il poligono delle forze. La lunghezza dei vettori, nella grafica adottata, fornisce l'entità degli sforzi Normali cercati.



5.2 – Il metodo delle sezioni di Ritter

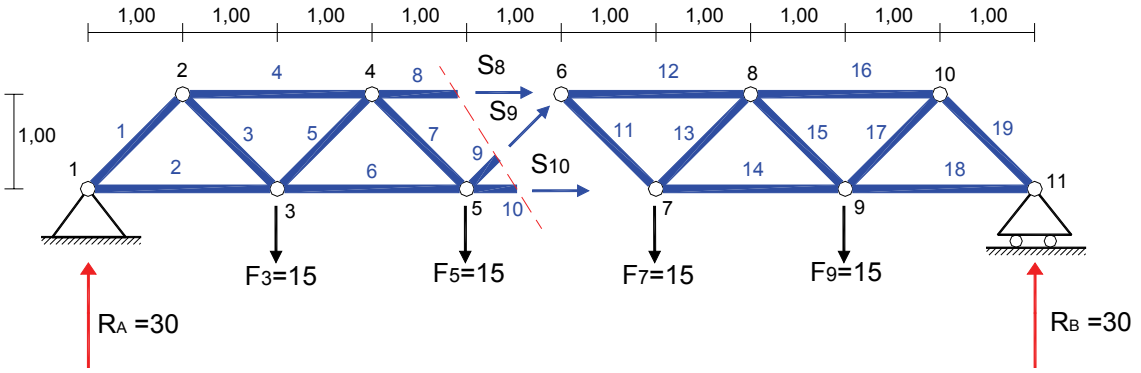
Il metodo consiste nell'immaginare di tagliare la travatura con una sezione che intersechi non più di tre aste, due delle quali convergenti in un nodo. Imponendo l'equilibrio alla rotazione di una parte della struttura intorno al nodo nel quale convergono le due aste, si può determinare lo sforzo agente nella terza asta tagliata dalla sezione.

5.2.1 – Un esempio numerico



Nella travatura reticolare qui rappresentata, si vuole determinare lo sforzo che agisce nell'asta n°

8. Per fare ciò con il metodo delle sezioni di Ritter, si deve immaginare di tagliare la trave con una sezione che intercetti le aste **8**, **9** e **10**.



Le forze che sono applicate sulla parte di sinistra della travatura devono essere equilibrate dagli sforzi agenti nelle aste **8**, **9** e **10**, tagliate dalla sezione di Ritter. Assunto per ipotesi che gli sforzi nelle aste sezionate siano tutti di trazione (positivi), per determinare lo sforzo nell'asta **8**, si deve imporre l'equilibrio alla rotazione intorno al nodo **5** nel quale concorrono le altre due aste. Gli sforzi delle aste **9** e **10** non compariranno nella relazione di equilibrio poiché concorrono proprio nel nodo **5** e quindi il loro contributo rotazionale è nullo.

$$R_A \cdot 4 - F_3 \cdot 2 + S_8 \cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_8 = -30 \cdot 4 + 15 \cdot 2 = -90$$

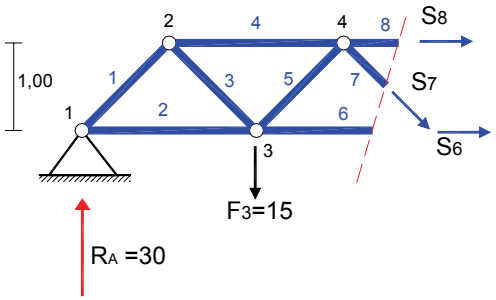
Lo sforzo ottenuto è negativo e quindi contrario all'ipotesi assunta. L'asta è un puntone.

Con la stessa sezione di Ritter si può calcolare anche lo sforzo nell'asta **10**, scrivendo l'equilibrio alla rotazione intorno al nodo **6**. In tal caso le aste **8** e **9**, concorrendo nel nodo di riferimento per l'equilibrio alla rotazione, non compariranno nella equazione che presenterà la sola incognita S_{10}.

$$R_A \cdot 5 - F_3 \cdot 3 - F_5 \cdot 1 - S_{10} \cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_{10} = 30 \cdot 5 - 15 \cdot 3 - 15 \cdot 1 = 90$$

Lo sforzo ottenuto è positivo e l'asta è effettivamente un tirante.

Con altre analoghe sezioni di Ritter si possono determinare gli sforzi in tutte le altre aste costituenti i correnti superiore ed inferiore della travatura. Si osservi che, per la travatura in esame, non esiste alcuna sezione di Ritter che consenta di calcolare lo sforzo nelle aste diagonali, e ciò perché i correnti sono paralleli e quindi convergenti all'infinito. Per determinare lo sforzo in una diagonale, può effettuarsi un equilibrio in direzione verticale del tratto di trave isolata dalle sezione di Ritter che taglia la diagonale in esame.



Si consideri una sezione di Ritter che tagli le aste **6**, **7** e **8**. Indicando con α l'angolo che la diagonale forma con la direzione orizzontale, l'equilibrio alla traslazione verticale impone che:

$$R_A - F_3 - S_7 \cdot sen\,\alpha = 0$$

L'equazione presenta la sola incognita S_7 e quindi:

$$S_7 = \frac{R_A - F_3}{sen\,\alpha} = \frac{30-15}{sen\,45} = 21{,}213$$

L'asta è un tirante. Facciamo un ulteriore osservazione sul metodo.

L'espressione con la quale abbiamo ricavato lo sforzo nell'asta **8** può essere espressa anche nella forma che segue:

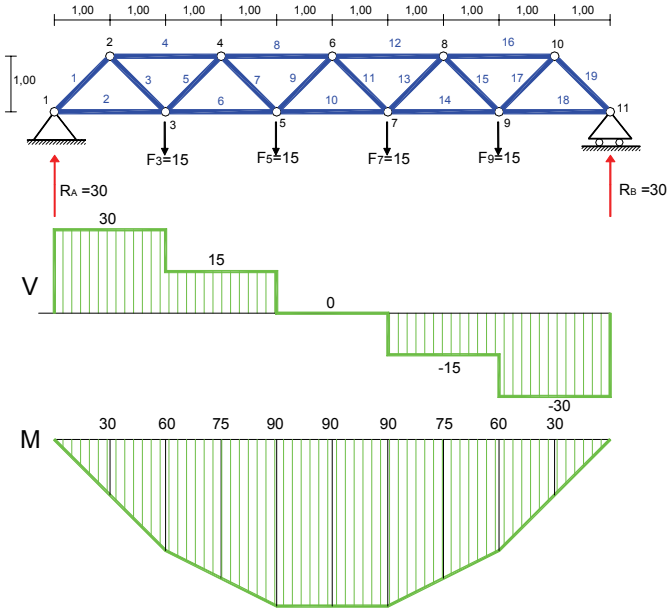
$$M_5 + S_8 \cdot 1 = 0 \qquad \text{dove} \qquad M_5 = R_A \cdot 4 - F_3 \cdot 2$$

Il momento M_5 rappresenta il momento flettente che la travatura reticolare, considerata come trave singola, avrebbe in corrispondenza del nodo 5 nel quale convergono le altre due aste **9** e **10**. Analogamente, nella relazione che conduce allo sforzo dell'asta **10**, compare il momento flettente che la trave avrebbe in corrispondenza del nodo **6** dove concorrono le aste **8** e **9**.

L'espressione con la quale abbiamo calcolato lo sforzo nella diagonale **7** può esprimersi nel modo che segue:

$$V_3^d - S_7 \cdot sen\,\alpha = 0 \qquad \text{dove} \qquad V_3^d = R_A - F_3$$

Nell'espressione compare il valore del taglio che si avrebbe nella travatura, considerata come singola trave, nel nodo **3** dal quale fuoriesce proprio la diagonale **7**.

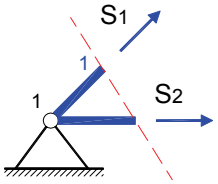


Da quanto osservato, si può ricavare la seguente metodologia per la soluzione di travature reticolari a correnti paralleli con il metodo delle sezioni di Ritter.

Si considera dapprima la travatura come se fosse un a trave semplice e si determinano i diagrammi del taglio e del momento flettente. Si ricavano poi gli sforzi nelle aste applicando il metodo delle sezioni di Ritter utilizzando i valori del momento e del taglio della sulla trave semplice.

Riprendiamo la travatura reticolare e calcoliamo gli sforzi in tutte le aste.

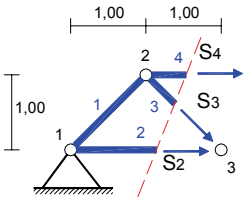
Asta 1



$$V_1^d + S_1 \cdot sen\,45 = 0$$

$$S_1 = -\frac{V_1^d}{sen\,45} = -\frac{30}{sen\,45} = -42{,}426$$

Aste 2, 3, 4

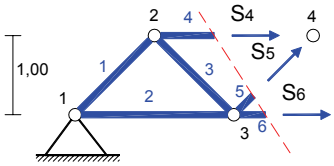


$$V_2^d - S_3 \cdot sen\,45 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 = \frac{V_2^d}{sen\,45} = \frac{30}{sen\,45} = 42{,}426$$

$$M_3 + S_4 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_4 = -\frac{M_3}{1} = -60$$

$$M_2 - S_2 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{M2}{1} = 30$$

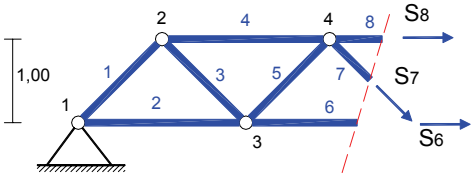
Aste 5, 6



$$V_3^d + S_5 \cdot sen\,45 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_5 = -\frac{V_3^d}{sen\,45} = -\frac{15}{sen\,45} = -21{,}213$$

$$M_4 - S_6 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_6 = \frac{M_4}{1} = 75$$

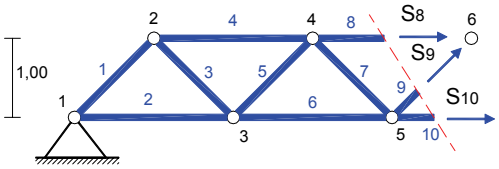
Aste 7, 8



$$S_7 = \frac{V_4^d}{sen\,45} = \frac{15}{sen\,45} = 21{,}213$$

$$S_8 = -\frac{M_5}{1} = -90$$

Aste 9, 10



$$S_9 = -\frac{V_5^d}{sen\,45} = \frac{0}{sen\,45} = 0$$

$$S_{10} = \frac{M_6}{1} = 90$$

La travatura reticolare è simmetrica e simmetricamente caricata, quindi le aste simmetricamente disposte avranno medesimo sforzo.

Nel prospetto che segue si riporta il riepilogo degli sforzi nelle aste

Asta	N [KN]	Tipo
1 – 19	-42,426	Puntone
2 – 18	30	Tirante
3 – 17	42,426	Tirante
4 – 16	-60	Puntone
5 – 16	-21,213	Puntone
6 – 14	75	Tirante
7 – 13	21,213	Tirante
8 – 12	-90	Puntone
9 – 11	0	------
10	90	Tirante