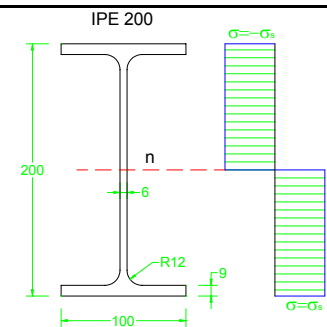
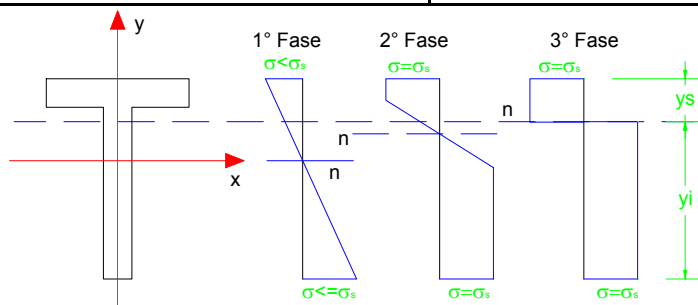
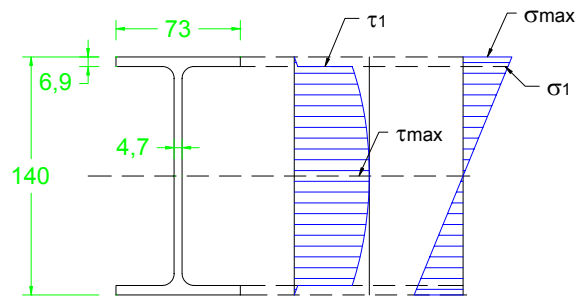
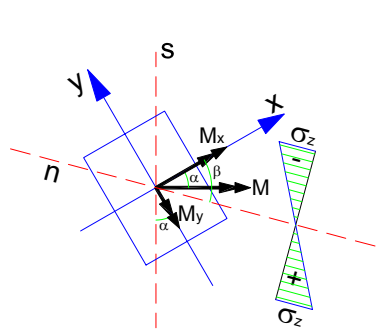


APPUNTI DI COSTRUZIONI



Il campo tensionale e le verifiche di resistenza nelle travi

Roberto Lapiello

INDICE

INDICE	I
PREFAZIONE	III
TENSIONI E DEFORMAZIONI	1
<i>Le Tensioni</i>	3
<i>Le deformazioni</i>	6
<i>Legame tra tensioni e deformazioni</i>	8
Materiali omogenei, isotropi e linearmente elastici	8
Materiali reali	11
IL PROGETTO E LA VERIFICA STRUTTURALE	15
<i>Resistenza e Sicurezza strutturale</i>	17
Metodi di verifica	17
IL CAMPO TENSIONALE E LE VERIFICHE DI RESISTENZA	21
<i>Il campo tensionale nelle sezioni</i>	23
<i>La sollecitazione di sforzo Normale semplice</i>	24
Verifiche di resistenza e progetto delle sezioni	25
Verifica allo S.L.U.	25
Progetto allo S.L.U.	26
Verifiche di resistenza in esercizio (S.L.E.)	26
Progetto e verifica con il metodo delle tensioni ammissibili (M.T.A.)	27
Esempi applicativi	28
<i>La sollecitazione di Flessione retta (semplice)</i>	34
Progetto e verifica in fase elastica (M.T.A.) di sezioni inflesse	36
Facciamo un esempio numerico	37
La flessione retta in campo plastico	38
Esempi applicativi	40
<i>La sollecitazione di Flessione deviata</i>	44
Progetto di sezioni soggette a flessione deviata (M.T.A.)	46
Facciamo un esempio numerico	46
La flessione deviata in campo plastico	49
Progetto delle sezioni soggette a flessione deviata (S.L.U.)	52
Facciamo un esempio numerico	53
Esempi applicativi	55
<i>La sollecitazione di Tenso (Presso) Flessione retta</i>	58
Progetto e verifica di sezioni soggette a tenso (presso) flessione retta (M.T.A.)	62
Facciamo qualche esempio numerico	62
La sollecitazione di presso flessione nei materiali non resistenti a trazione	66
Facciamo un esempio numerico	67
La tenso (presso) flessione retta in campo plastico	68
I Domini di Resistenza	70
I Domini di Resistenza nelle sezioni a Doppio T	73
Facciamo qualche esempio numerico	78
Esempi applicativi	80
<i>La sollecitazione di Tenso (Presso) Flessione deviata</i>	83
Progetto e verifica di sezioni soggette a tenso (presso) flessione deviata (M.T.A.)	85

Facciamo un esempio numerico.....	86
La tenso (presso) flessione deviata in campo plastico	88
<i>La sollecitazione di Taglio</i>	94
La sollecitazione di Taglio semplice.....	94
Facciamo un esempio numerico.....	94
La sollecitazione di Taglio nelle travi inflesse.....	95
Facciamo un esempio numerico.....	98
Esempi applicativi.....	101
La sollecitazione di Taglio in campo plastico.....	105
Esempi applicativi.....	112
<i>La sollecitazione di Torsione</i>	120
La sezione circolare cava	122
La sezione rettangolare	123
IL CARICO CRITICO EULERIANO.....	125
<i>Il problema del carico di punta</i>	127
Il carico critico di Eulero	127
Il metodo omega	129
Esempi applicativi.....	132
SAGOMARIO DEI PROFILATI METALLICI SEZIONI TIPO IPE E HE.....	135

PREFAZIONE

La scrittura di questo testo nasce inizialmente con lo scopo di proporre agli allievi del corso di Costruzioni per geometri, una dispensa didattica che fosse nel contempo agile da consultare, sufficientemente completa nella trattazione teorica degli argomenti trattati, ma che ponesse nel giusto rilievo le modalità applicative pratiche dei concetti studiati.

L'impostazione didattica del testo e l'utilizzo di strumenti matematici semplici nella trattazione dei problemi, offre l'occasione anche al lettore più esperto di focalizzare l'attenzione sui concetti fisici fondamentali e sugli strumenti operativi pratici per l'impostazione dei comuni calcoli strutturali di verifica.

Il testo, per quegli argomenti trattati, che non sono tradizionalmente ricompresi nei testi di costruzioni per geometri, si pone anche come occasione di primo approccio alla comprensione di quei problemi di verifica strutturale, che sono spesso affrontati in modo asettico, attraverso l'uso di strumenti informatici preconfezionati. L'originalità di alcuni contenuti per questo tipo di testo e la semplicità pratica con la quale vengono posti, offrono lo stimolo al lettore per un successivo approfondimento su testi più specifici.

Nella parte iniziale del testo vengono dapprima illustrati i parametri che permettono di definire la deformazione dei corpi, per passare poi alla trattazione delle sei componenti di tensione ed alle relazioni che legano lo stato tensionale ai parametri della deformazione nell'ipotesi di elasticità lineare dei corpi.

Vengono poi illustrati brevemente i principali metodi di verifica delle strutture ed i diagrammi di legame caratteristici a cui si farà riferimento per la soluzione del problema del De Saint-Venant.

Il momento di profondo rinnovo delle normative tecniche nazionali, con l'ormai esplicito abbandono del tradizionale metodo delle tensioni ammissibili a favore del più completo metodo semiprobabilistico agli stati limite quale strumento di verifiche delle strutture, mi ha spinto ad ampliare il contenuto tradizionale di questo tipo di testi, introducendo alcuni elementi teorici che sono la base per la verifica delle resistenze strutturali delle sezioni in campo plastico.

Vengono in tal senso studiate le comuni forme di sezioni in campo plastico considerandole soggette sia a sollecitazioni di flessione semplice e devista, sia a sollecitazioni composte di flessione a sforzo Normale. Viene inoltre affrontata la resistenza a Taglio delle sezioni a doppio T, tipiche delle strutture in acciaio, e l'influenza del Taglio sulla capacità di resistere alle sollecitazioni di flessione e/o Sforzo Normale.

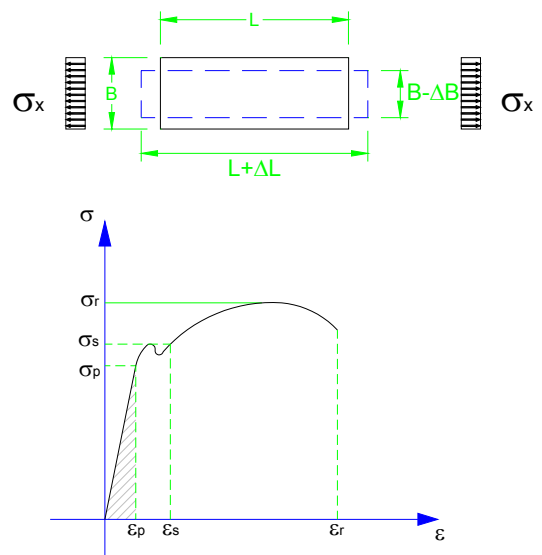
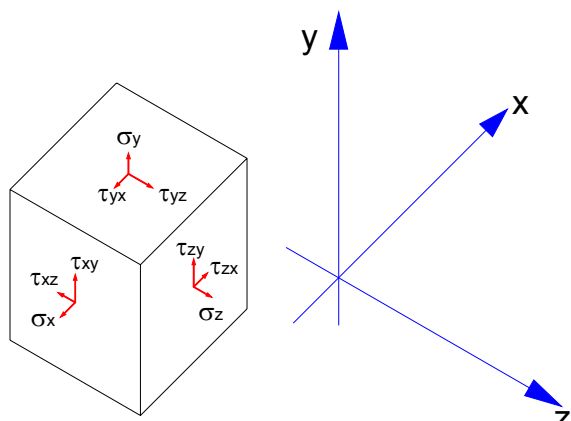
Per tutti i casi di sollecitazione trattati sono presentati esempi applicativi numerici, relativi sia all'applicazione dei risultati in campo elastico, con il metodo delle tensioni ammissibili, sia ai risultati in campo plastico, attraverso le verifiche agli stati limite ultimi.

La trattazione dei problemi attinenti la verifica di resistenza delle travi si conclude con la presentazione dei fondamentali risultati della trattazione di Eulero sulla determinazione del carico critico e la presentazione del metodo omega come strumento di verifica degli elementi snelli soggetti a carico assiale.

Nella speranza di incontrare l'interesse degli studenti e l'approvazione del lettore esperto per il lavoro svolto, ringrazio anticipatamente quanti porranno la loro preziosa attenzione nella lettura di queste pagine.

Roberto Lapiello

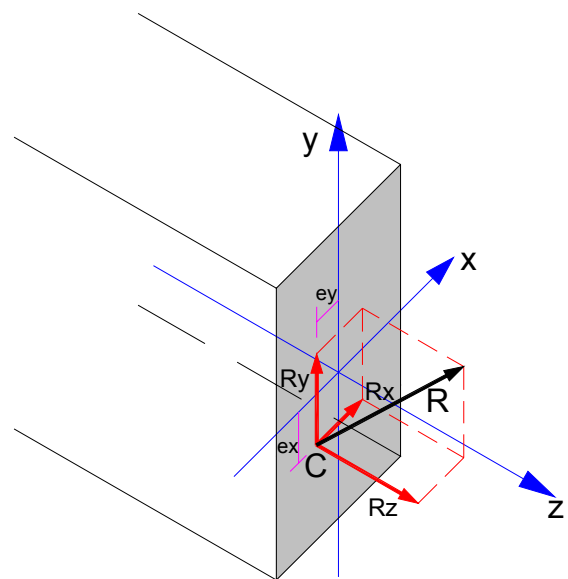
TENSIONI E DEFORMAZIONI



Le Tensioni

Abbiamo già visto che operando un taglio in una trave in maniera da isolare un tratto piccolissimo (concio di trave) sul quale non sono applicate forze o momenti concentrati, lo studio dell'equilibrio di questo concio ci ha condotti alla definizione ed al calcolo delle caratteristiche della sollecitazione. In particolare trattando esclusivamente problemi piani, abbiamo parlato di sforzo Normale, taglio e Momento flettente. In maniera più generica, considerando che la trave è un elemento prismatico le cui sezioni piane possono avere assi principali d'inerzia non coincidenti con gli assi di sollecitazione, e considerando anche la possibilità di avere forze esterne al piano che contiene la trave, la condizione di equilibrio interno di un concio di trave può condurre ancora alla determinazione delle caratteristiche della sollecitazione che però in maniera più generale vengono determinate in relazione ad una terna di riferimento che avente origine nel baricentro della sezione presenta l'asse **X** orientato nella direzione dell'asse della trave con verso uscente dalla sezione considerata, e gli altri due assi **Y** e **Z** coincidenti con gli assi principali della sezione.

Nella figura a fianco è rappresentata la sezione terminale di un concio di trave. La forma della sezione della trave rappresentata è rettangolare solo per semplicità di rappresentazione ma ovviamente ciò che descrive vale indifferentemente dalla forma della sezione. Nel rispetto dell'equilibrio esterno sulla sezione considerata agisce una forza **R** applicata in un punto **C** (centro di sollecitazione) che equivale alla risultante di tutte le forze applicate nel tratto trave precedente alla sezione considerata. Tale forza **R** può essere scomposta nelle direzioni degli assi di riferimento determinando così le componenti **R_x**, **R_y**, **R_z**. Il centro di sollecitazione **C** (potrebbe essere anche esterno alla sezione) è posto alla distanza **e_x** dall'asse **x** ed alla distanza



e_y dall'asse **y**; tali distanze sono definite come eccentricità del centro di sollecitazione **C** rispetto agli assi principali della sezione. Le componenti **R_z**, **R_y** e **R_x** rappresentano rispettivamente lo sforzo Normale **N** agente sulla sezione, lo sforzo di Taglio **T_y** agente nella direzione dell'asse **y** e lo sforzo di Taglio **T_x** agente nella direzione dell'asse **x**. Le caratteristiche della sollecitazione, **N**, **T_y**, **T_x**, si definiscono positive quando sono concordi alla terna di riferimento adottata. Lo sforzo Normale **N** sarà quindi positivo se di trazione. La componente **R_z** (lo sforzo normale **N**) essendo applicata nel punto **C** che presenta le eccentricità **e_x** rispetto all'asse **x** ed **e_y** rispetto all'asse **y**, determina rispetto ai due assi appena citati i momenti flettenti **M_x** e **M_y** pari rispettivamente a:

$$M_x = R_z \cdot e_x = N \cdot e_x$$

$$M_y = R_z \cdot e_y = N \cdot e_y$$

Il momento flettente **M_x** tende a determinare una rotazione della sezione intorno all'asse **x** (orizzontale) ed è definito positivo se tende le fibre inferiori (le fibre che presentano coordinata **y** negativa). Il momento flettente **M_y** tende a determinare una rotazione della sezione rispetto all'asse **y** ed è definito positivo se tende le fibre poste dal lato delle **x** positive. Le componenti **R_x** e **R_y**, agendo nel piano **xy** determinano un momento rispetto all'asse **z** pari a:

$$M_z = T_y \cdot e_y - T_x \cdot e_x$$

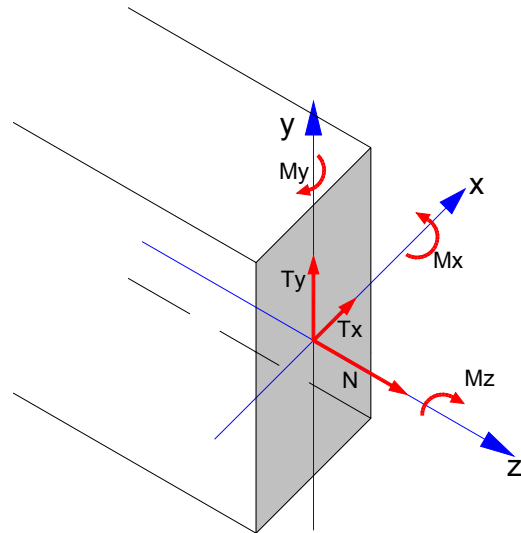
Il momento **M_z** è il Momento torcente ed è assunto positivo quando tende ad imprimere una rotazione della sezione antioraria intorno all'asse **z**. Per quanto attiene ai segni algebrici da attribuire ai momenti **M_x**, **M_y** ed **M_z**, in riferimento alla condizione rappresentata in figura si ha un momenti Flettenti **M_x**

Nota:

Anche se l'argomento esula certamente dagli obiettivi di questo testo, è bene precisare che in generale il momento torcente va valutato considerando l'eccentricità rispetto ad un punto detto centro di taglio che non sempre coincide con il baricentro della sezione. Nella sezione rettangolare ed in tutte le sezioni simmetriche rispetto agli assi principali, il centro di taglio coincide con il baricentro della sezione.

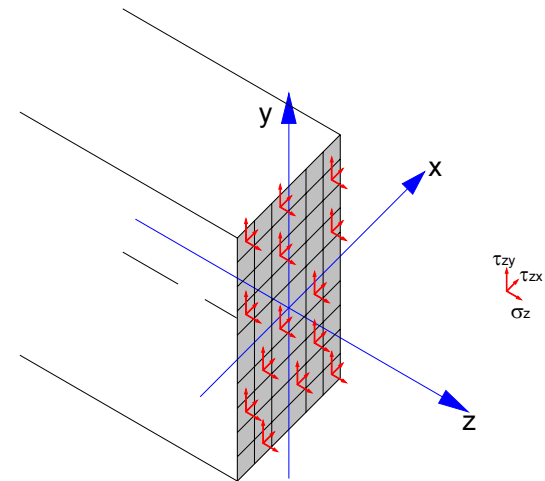
positivo ed un momento M_y negativo. Il segno del momento torcente M_z dipende da quale dei due prodotti prevale nella determinazione del valore di M_z .

I momenti flettenti ed il momento torcente assumono, dal punto di vista delle forze, le caratteristiche di momenti di trasporto che consentono di considerare in sostituzione delle componenti R_x , R_y ed R_z , lo sforzo Normale N ed i Tagli T_x e T_y applicati nel baricentro ed in aggiunta i tre momenti intorno agli assi M_x , M_y ed M_z . Il sistema di forze così ottenuto è equivalente al sistema di forze costituito dalle componenti di R e costituiscono le sei caratteristiche della sollecitazione. In figura sono rappresentati i versi positivi delle caratteristiche della sollecitazione.



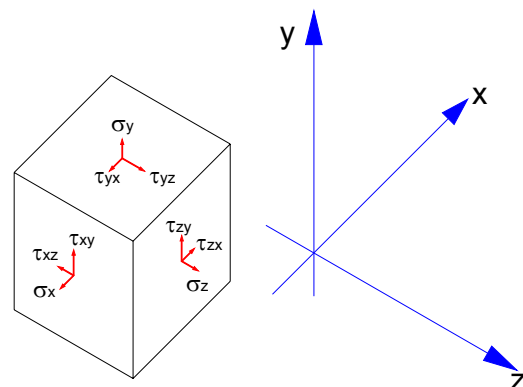
Definite le sei caratteristiche della sollecitazione, ritorniamo un attimo a considerare la forza R agente sulla sezione in esame e che rappresenta la risultante di tutte le forze applicate sul tratto di trave precedente alla sezione analizzata. Poiché la sezione ha una sua forma ed una certa continuità di materiale, è chiaro che se pensiamo di dividere la sezione in tante areole piccolissime di superficie unitaria, dobbiamo attenderci che su ogni areola agirà una certa forza P la quale potrà scomporsi nelle sue componenti σ_z , τ_{zy} e τ_{zx} .

Le componenti appena introdotte ed agenti su un areola di superficie unitaria, prendono il nome di tensioni e presentano le dimensioni fisiche di una forza diviso una superficie. La σ_z è diretta secondo la direzione dell'asse della trave z e rappresenta la tensione normale alla superficie della sezione nel punto considerato; La σ_z è positiva se di trazione (uscente dalla sezione). Le τ_{zy} e τ_{zx} sono dette tensioni tangenziali, si considerano applicate nel punto considerato ed agiscono nel piano della sezione. La risultante del sistema costituito dalle tensioni σ_z , τ_{zy} e τ_{zx} coincide per l'equilibrio della sezione alla forza R applicata su di essa.



Se invece di un tratto di trave si considera un elementino a forma di cubo facente parte di un elemento strutturale più generale del modello trave e sul quale su ogni faccia si può avere una forza risultante applicata, il sistema di tensione sarà completo e su ogni faccia avremo una σ e due τ . Si potrebbe dimostrare che per l'equilibrio dell'elementino sussiste la cosiddetta proprietà di simmetria delle tensioni tangenziali.

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned}$$



Assegnato uno stato di tensione nell'intorno di un punto, esiste una particolare terna di riferimento cartesiana rispetto alla quale risultano nulle tutte le tensioni tangenziali mentre sono diverse da zero le tensioni assiali. Tale terna di riferimento cartesiana individua le **direzioni principali di tensione** e le tensioni assiali corrispondenti sono

riconosciute come le **tensioni principali**. La ricerca delle tensioni principali è spesso necessaria affinché possano effettuarsi le verifiche di resistenza sul materiale costituente l'elemento principale, ma la ricerca degli assi principali di tensione e delle relative tensioni principale è un problema che esula dagli obiettivi di questo testo. Ci limitiamo però a fornire l'espressione con la quale possono calcolarsi le tensioni principali nel caso di uno stato tensionale piano e l'angolo di inclinazione delle direzioni principali.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\xi} \\ \sigma_{\eta} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \varphi = \frac{1}{2} \cdot \left(\arctg \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \pm 180^\circ \right)$$

Per quanto attiene alle unità di misura utili per esprimere le tensioni, il sistema internazionale prevede di esprimere le forze in Newton (N) e le distanze in metri (m) e considerando che le tensioni rappresentano una forza per unità di superficie, queste andranno quindi espresse in $\left(\frac{N}{m^2}\right)$.

Ricordando che il Pascal (Pa) è l'unità di misura delle pressioni e che $1Pa = \frac{1N}{1m^2}$, le tensioni possono essere espresse appunto in Pascal. In realtà si preferisce adottare come unità di misura il megaPascal ($1MPa = 1 \cdot 10^6 Pa$) multiplo del pascal e più idoneo a rappresentare i correnti valori delle tensioni.

$$1MPa = \frac{1 \cdot 10^6 N}{1m^2} = \frac{1 \cdot 10^6 N}{1 \cdot 10^6 mm^2} = \frac{1N}{1mm^2}$$

Le tensioni vengono anche comunemente espresse in Newton al millimetro quadrato $\left(\frac{N}{mm^2}\right)$ o anche in deca Newton al centimetro quadrato $\left(\frac{daN}{cm^2}\right)$ ed infine anche a volte in Kilo Pascal (KPa).

$$1KPa = \frac{1 \cdot 10^3 N}{m^2} = \frac{1 \cdot 10^3 N}{1 \cdot 10^4 cm^2} = \frac{1 \cdot 10^2 daN}{1 \cdot 10^4 cm^2} = 0,01 \frac{daN}{cm^2}$$

$$1KPa = \frac{1 \cdot 10^3 N}{m^2} = \frac{1 \cdot 10^3 N}{1 \cdot 10^6 mm^2} = 0,001 \frac{N}{mm^2}$$

$$1MPa = \frac{1 \cdot 10^6 N}{1m^2} = \frac{1 \cdot 10^6 N}{1 \cdot 10^4 cm^2} = \frac{1 \cdot 10^5 daN}{1 \cdot 10^4 cm^2} = 10 \frac{daN}{cm^2}$$

Le deformazioni

Consideriamo un elemento prismatico di dimensioni contenute. L'elemento considerato potrà deformarsi modificando forma e dimensioni, ma mantenendo la continuità del materiale, cioè senza la creazione di crepe o discontinuità. Considereremo separatamente la deformazione che comporta una variazione delle dimensioni del prisma senza variazione di forma (gli angoli tra le facce non variano) e la deformazione che comporta esclusivamente una variazione di forma (variazione degli angoli tra le facce del solido).

Consideriamo un elemento solido prismatico di lunghezza L nella direzione z . A seguito di una deformazione lineare, il prisma si è allungato di ΔL nella direzione z . Se ipotizziamo che la lunghezza L è estremamente piccola o comunque che l'allungamento ΔL sia il frutto di una deformazione che ha interessato il prisma in maniera uniforme per tutta la sua lunghezza, si può definire il **coefficiente di dilatazione lineare**

ϵ nella direzione z :
$$\epsilon_z = \frac{\Delta L}{L}$$

Il coefficiente di dilatazione lineare appena introdotto esprime la variazione di lunghezza che si ha in un solido di lunghezza unitaria a seguito di una deformazione lineare, ed è assunto positivo se la deformazione produce un allungamento del solido. Per il solido prima considerato, la lunghezza finale dell'elemento a seguito della deformazione sarà:

$$L + \Delta L = L + \epsilon_z \cdot L = L \cdot (1 + \epsilon_z)$$

Analogamente a quanto appena descritto per la direzione z si definiscono i coefficienti di dilatazione lineari anche per la direzione x e y .

Se consideriamo un elemento a forma di parallelepipedo di dimensioni L_x , L_y , L_z , secondo gli assi coordinati x, y e z , a seguito di una deformazione lineare che interessa tutte le direzioni di riferimento, le nuove dimensioni del prisma saranno:

$$\begin{aligned} L_x + \Delta L_x &= L_x \cdot (1 + \epsilon_x) \\ L_y + \Delta L_y &= L_y \cdot (1 + \epsilon_y) \\ L_z + \Delta L_z &= L_z \cdot (1 + \epsilon_z) \end{aligned}$$

Osserviamo in ultimo che nelle ipotesi di piccoli spostamenti il solido considerato subirà una variazione di volume che dipende esclusivamente dai coefficienti di dilatazione lineari.

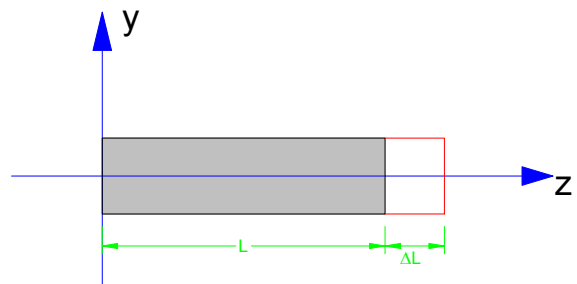
$$V + \Delta V = L_x \cdot (1 + \epsilon_x) \cdot L_y \cdot (1 + \epsilon_y) \cdot L_z \cdot (1 + \epsilon_z)$$

Trascurando i prodotti misti tra i coefficienti lineari si può scrivere:

$$V + \Delta V = V + V \cdot (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

da cui si ricava la variazione volumetrica:

$$\Delta V = V \cdot (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$



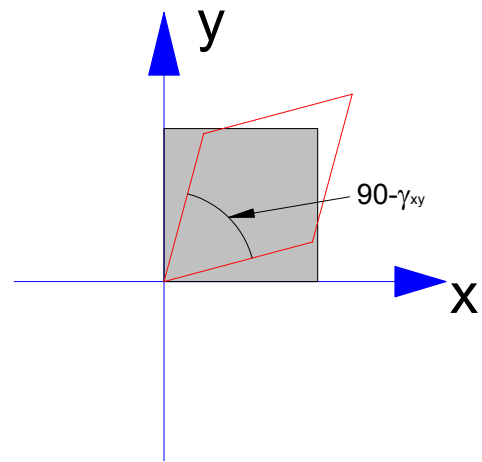
e quindi il coefficiente di variazione volumetrica $\Theta = \frac{\Delta V}{V} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$

Consideriamo ora un elementino solido nel piano **xy**. A seguito di una deformazione di scorrimento (si definisce scorrimento la variazione angolare a seguito di una deformazione) tutti gli angoli interni risultano variati di una quantità γ_{xy} che si definisce appunto scorrimento. In particolare gli angoli opposti risulteranno gli uni diminuiti della quantità γ_{xy} e gli altri aumentati della quantità γ_{xy} . Nelle ipotesi di piccoli spostamenti potrà ritenersi che l'elementino considerato abbia subito una variazione di forma senza variazione di volume.

Si può definire in maniera analoga lo scorrimento anche nei piani **xz** e **yz** definendo quindi in totale i tre scorrimenti.

$$\gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}$$

Per descrivere in maniera completa la deformazione di un solido abbiamo quindi la necessità di utilizzare 6 parametri, di cui tre lineari e tre angolari.



Legame tra tensioni e deformazioni

Tutti i materiali hanno più o meno evidente la capacità di deformarsi sotto l'azione di un sistema di forze, ma le relazioni tra tensioni e coefficienti di deformazione possono essere diverse in quanto diverso può essere la modalità con la quale la deformazione si verifica. Se un corpo sottoposto ad un sistema di forze si deforma e successivamente, togliendo le forze che lo sollecitano, il corpo ritorna alla sua configurazione geometrica iniziale, il materiale con il quale è realizzato si dice elastico. Se invece un corpo sottoposto all'azione di un sistema di forze si deforma e la configurazione deformata permane anche dopo che le sollecitazioni sono state rimosse, il materiale si dice che ha assunto un comportamento plastico. Abbiamo qui descritto due tipi diversi di comportamento dei corpi riconoscendo, un comportamento elastico che è caratterizzato dalla capacità di deformarsi sotto l'azione delle forze e di eliminare la deformazione quando l'azione delle forze svanisce, ed un comportamento plastico attraverso il quale il materiale si deforma in maniera definitiva sotto l'azione di un sistema di forze. I due comportamenti in realtà coesistono nel medesimo materiale e l'uno o l'altro comportamento dipende generalmente dall'entità delle forze applicate. Nei materiali reali generalmente si riscontra al crescere delle forze applicate dapprima un comportamento più o meno elastico per poi passare ad un comportamento tipicamente plastico e quindi, se le forze continuano a crescere, viene raggiunto il limite di resistenza del materiale e la conseguente rottura.

Materiali omogenei, isotropi e linearmente elastici

Le relazioni tra le tensioni e deformazioni in fase elastica sono ovviamente diverse a seconda delle ipotesi che si pongono alla base dello studio del comportamento del materiale. Se un materiale è omogeneo ed isotropo, ed il comportamento si suppone linearmente elastico, si stabilisce che tra i coefficienti di deformazione ε e le tensioni σ sussiste un legame lineare del tipo :

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$$

dove **E** rappresenta una costante che è detta **modulo di elasticità lineare** o **modulo di Young**.

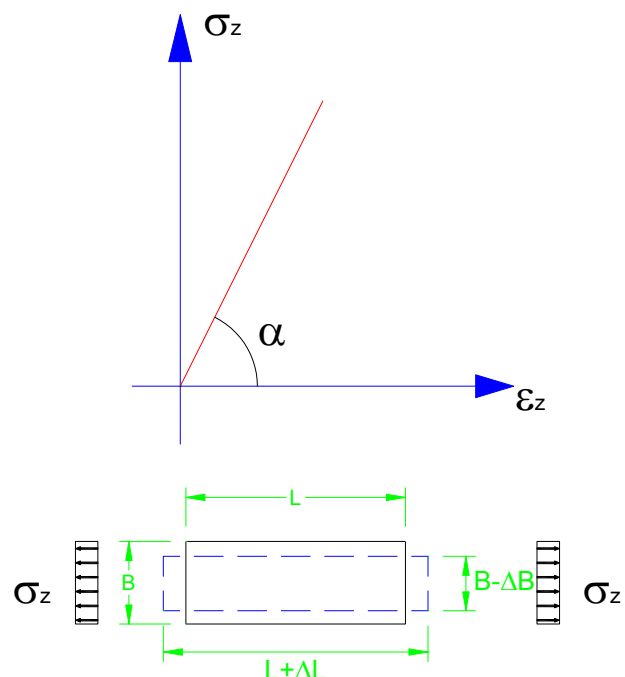
La relazione esprime la cosiddetta **Legge di Hooke**, la quale stabilisce che nelle ipotesi di elasticità lineare del materiale, la tensione cresce in maniera proporzionale alla deformazione lineare nella stessa direzione secondo la costante di proporzionalità **E**.

Si pensi di applicare una tensione σ_z di trazione alle due facce opposte di un elementino prismatico; se il materiale è linearmente elastico ed isotropo l'elementino si allungherà nella direzione della tensione applicata in maniera proporzionale all'intensità della tensione stessa, mentre nelle direzioni trasversali si registrerà un restringimento della sezione. Se riportiamo su un diagramma le corrispondenze dei valori σ_z ed $\varepsilon_z = \frac{\Delta L}{L}$,

nell'ipotesi di elasticità lineare si otterrà una retta uscente dall'origine ed inclinata di un angolo α rispetto all'asse delle σ_z .

Nota:

Si definisce isotropo un materiale le cui proprietà meccaniche ed in particolare elastiche, sono indipendenti dalla direzione



L'equazione della retta ottenuta è appunto l'espressione della Legge di Hooke, dove la costante elastica **E** rappresenta, in pratica, la pendenza della retta.

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$$

$$E = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z} = \operatorname{arctg} \alpha$$

Nelle direzioni perpendicolari **x** e **y**, si evidenzia un restringimento della sezione **ΔB** e quindi un coefficiente di deformazione $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\Delta B}{B} = -\frac{\varepsilon_z}{m}$ dove $\frac{1}{m}$ rappresenta un secondo coefficiente elastico che assume il nome di **modulo di Poisson**.

$$\nu = \frac{1}{m}$$

I coefficienti di deformazione ε_x e ε_y possono quindi essere espressi in funzione della tensione applicata σ_z .

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\varepsilon_z}{m} = -\frac{\sigma_z}{E \cdot m}$$

Se si considera un elementino soggetto ad uno stato tensionale secondo tutte e tre le direzioni coordinate, i tre parametri della deformazione assumono la forma generale che segue:

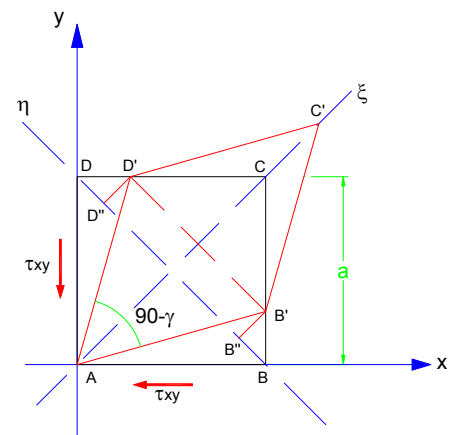
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m} \right) \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right)$$

Per determinare le relazioni tra le tensioni e gli scorrimenti, consideriamo un elementino soggetto alla sola τ_{xy} . L'elementino è un cubo avente la lunghezza dei lati piccolissima ed uguale ad **a**. Sotto l'azione della tensione tangenziale la deformazione avviene nell'ipotesi dei piccoli spostamenti ed inoltre non essendoci tensione assiale nelle direzioni **x** e **y** i punti **D** e **B** si spostano lungo i lati **DC** e **BC**.

Le diagonali dell'elemento deformato restano ortogonali tra loro in quanto parallele agli assi principali di tensione, infatti:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{0} \right) = 45^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \sqrt{\tau_{xy}^2} = \pm \tau_{xy}$$



Le tensioni principali valgono quindi :

$$\sigma_\xi = \tau_{xy} \quad ; \quad \sigma_\eta = -\tau_{xy}$$

Nella direzione ξ si ha il seguente valore del coefficiente di deformazione:

$$\varepsilon_\xi = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_\xi - \frac{\sigma_\eta}{m} \right) = \frac{\tau_{xy}}{E} \cdot \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

L'allungamento CC' sarà : $CC' = AC \cdot \varepsilon_{\xi} = a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\tau_{xy}}{E} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)$

L'accorciamento dell'altra diagonale sarà della stessa quantità e pari a $BB'' + DD''$. Il segmento BB'' sarà pari quindi a : $BB'' = \frac{1}{2} \cdot CC' = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\tau_{xy}}{E} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\tau_{xy}}{E} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)$

Il segmento BB' sarà pari a : $BB' = BB'' \cdot \sqrt{2} = \frac{a \cdot \tau_{xy}}{E} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)$

L'angolo $\gamma_{xy} = \hat{B}AB' + \hat{D}AD' = 2 \cdot \hat{B}AB'$ e trattandosi di piccoli spostamenti si può confondere l'angolo con la tangente e quindi:

$$\gamma_{xy} = 2 \cdot \hat{B}AB' = 2 \cdot \frac{BB'}{AB} = 2 \cdot \frac{a \cdot \tau_{xy}}{a \cdot E} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \tau_{xy} \cdot \frac{2}{E} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

Nell'espressione appena ricavata, la quantità che moltiplica la tensione tangenziale dipende esclusivamente dalle costanti elastiche già introdotte e funzioni solo del materiale adottato. Definendo il **modulo di elasticità tangenziale G**:

$$G = \frac{E}{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$$

la relazione tra la deformazione di scorrimento γ e la tensione tangenziale τ può esprimersi nella

forma: $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$

Rifacendo il procedimento per tutti e tre i piani coordinati, si ricavano le tre relazioni tra scorrimento e tensioni tangenziali.

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G};$$

Abbiamo determinato le relazioni che legano tensioni e deformazione nelle ipotesi di un materiale omogeneo, isotropo e linearmente elastico, introducendo appunto dei coefficienti elastici che sono caratteristiche proprie del materiale considerato. Attraverso ragionamenti e dimostrazioni che esulano dagli obiettivi di questo testo, si determina che il modulo di Poisson può assumere valori entro un intervallo ben definito e cioè:

$$-1 \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2}$$

e quindi essendo $E = 2 \cdot G \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)$ si ricava che $0 \leq E \leq 3 \cdot G$

ed ancora essendo $G = \frac{E}{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$ si ricava che $G > \frac{E}{3}$

Materiali reali

Abbiamo analizzato prima il comportamento di un materiale puramente teorico, omogeneo, isotropo e con comportamento perfettamente elastico. La caratteristica di omogeneità può essere abbastanza soddisfatta, almeno ad un livello macroscopico, dai materiali reali, mentre la caratteristica di isotropia risulta più difficilmente soddisfatta. È un materiale isotropo l'acciaio e gli altri materiali metallici, può considerarsi isotropo il calcestruzzo, mentre la proprietà di isotropia risulta certamente non soddisfatta dal legno a causa della natura stessa del materiale costituito da fibre orientate nella direzione del tronco. Alcuni materiali presentano caratteristiche descrivibili attraverso i parametri caratteristici secondo tre direzioni ortogonali, tali materiali sono detti ortotropi e se utilizzati per elementi strutturali monodimensionali tipo trave, possono con buona approssimazione essere trattati come isotropi.

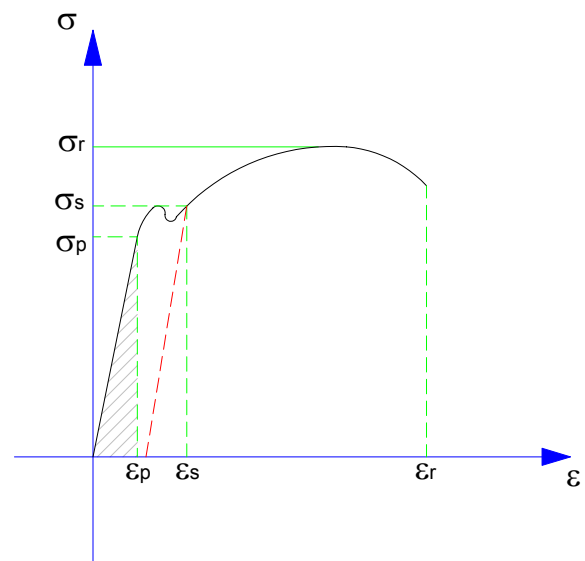
La caratteristica di elasticità lineare è quella che risulta più difficile da riscontrare nei materiali reali. Il comportamento perfettamente elastico comporta per il materiale la diretta proporzionalità tra tensione e deformazione e la totale assenza di deformazione residua indipendentemente dalla entità della tensione che viene applicata e fino al raggiungimento della tensione che provoca la rottura del materiale. Nei materiali reali l'ipotesi di un modulo elastico costante fino a rottura non è mai rispettata, ed inoltre possono essere riscontrate deformazioni residue (plastiche) al raggiungimento di particolari valori di tensione. Analizziamo quindi alcuni diagrammi tipici della relazione tra tensione e deformazione nei materiali reali. La costruzione del diagramma si ottiene attraverso l'interpretazione dei risultati di una prova di trazione o di compressione. La prova di trazione per l'acciaio viene realizzata con opportune macchine attraverso l'applicazione su un provino prismatico di area nota, di una forza di trazione che si fa crescere lentamente nel tempo. La tensione di trazione σ viene determinata rapportando la forza applicata all'area della sezione del provino, ed è espressa solitamente in N/mm^2 (MPa).

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Durante la prova il provino si allunga sotto l'azione della forza applicata e la deformazione ε , considerata uniforme lungo il provino, si determina rapportando la variazione di lunghezza ΔL alla lunghezza originaria L del provino e viene espresso solitamente in forma percentuale.

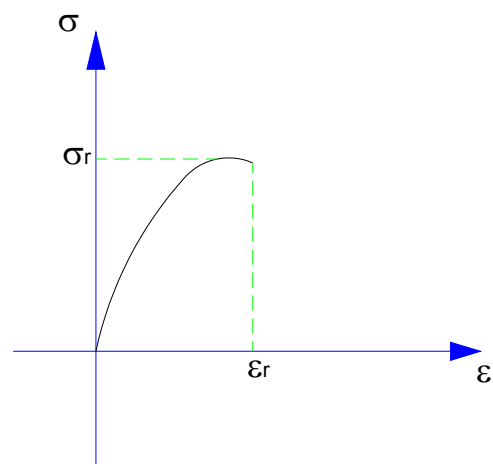
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Nella figura a fianco è rappresentato con una certa approssimazione il diagramma tipico di un acciaio duttile. Al crescere della forza applicata al provino, si evidenzia un primo tratto praticamente rettilineo nel quale sussiste la proporzionalità tra tensione e deformazione. Al raggiungimento di un determinato valore della tensione σ_p , il legame tensione deformazione non è più lineare ma tende ad incurvarsi leggermente fino a raggiungere il valore di tensione σ_s , dove si verifica lo snervamento del materiale. Se durante la prova il materiale ad una fase di carico che comporta una tensione minore di σ_p si fa seguire una fase di scarico, la deformazione rientra totalmente, quindi si può ritenere che il materiale assume in questo campo un comportamento perfettamente elastico. La tensione σ_p è detta tensione di proporzionalità. Superata la tensione di proporzionalità se si effettua una fase di scarico, per esempio a partire dal valore σ_s , non tutta la deformazione viene recuperata e durante il diagramma di scarico si presenta



rettilineo e parallelo al tratto iniziale, come quello rappresentato in figura con il tratto rosso. Il materiale quindi superata la tensione di proporzionalità comincia ad evidenziare una certa capacità di deformazione plastica. Superato durante la prova il valore della tensione di snervamento, il diagramma tende ad incurvarsi e si osserva la deformazione crescere molto più velocemente della tensione fino al raggiungimento del valore limite σ_r , dove si osserva che la deformazione cresce praticamente a tensione costante e si determina la rottura del provino. La tensione σ_r è detta tensione di rottura e la ϵ_r e la corrispondente deformazione a rottura del materiale. Durante la prova raggiunta la tensione di rottura il diagramma sembra comportare una riduzione di tensione, ma in realtà tale circostanza è determinata dal fatto che la tensione è calcolata facendo riferimento alla sezione del provino indeformata mentre in corrispondenza della rottura si registra un forte restringimento della sezione. La zona di diagramma tratteggiata in figura rappresenta la fase elastica del materiale, mentre la restante parte fino alla rottura rappresenta la fase plastica. I materiali che presentano una pronunciata fase plastica sono i cosiddetti materiali duttili e sono particolarmente indicati per l'utilizzo nelle costruzioni in quanto sono in grado di assorbire grandi quantità di energia ed inoltre il possibile crollo della struttura viene evidenziato da grosse deformazioni che essendo visibili, riducono il rischio di crolli improvvisi con perdite di vite umane.

Di natura diversa è il diagramma che si ottiene da una prova di compressione su un provino di calcestruzzo. Il calcestruzzo, a differenza dell'acciaio presenta un diverso comportamento a compressione ed a trazione, in particolare mentre evidenzia una buona resistenza a compressione dimostra una resistenza a trazione pari a circa un decimo di quella a compressione. Il diagramma tensione-deformazione, riportato nella figura a fianco, risulta pressoché parabolico, non presenta il fenomeno dello snervamento e la rottura si raggiunge con valori della deformazione piccoli in relazione a quelli dell'acciaio. Se la tensione di sollecitazione del calcestruzzo si mantiene molto minore della tensione di rottura, il comportamento del materiale può considerarsi linearmente elastico con una approssimazione che comunque risulta accettabile per le analisi che si limitano allo studio delle sollecitazioni di esercizio nelle strutture.



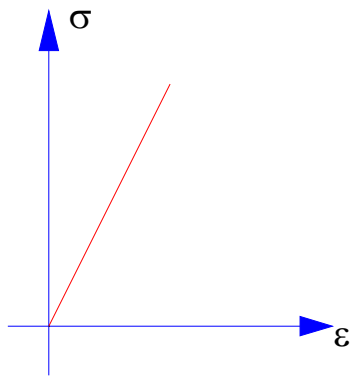
Le normative tecniche definiscono le caratteristiche di resistenza e di elasticità da attribuirsi ai materiali da costruzione e stabiliscono inoltre le modalità di prova per l'accertamento dei requisiti fissati in progetto.

Le normative definiscono anche le modalità di calcolo da adottarsi ed i legami tensione-deformazione semplificati da adottare in relazione alle verifiche di particolari condizioni e requisiti di sicurezza che la struttura deve garantire.

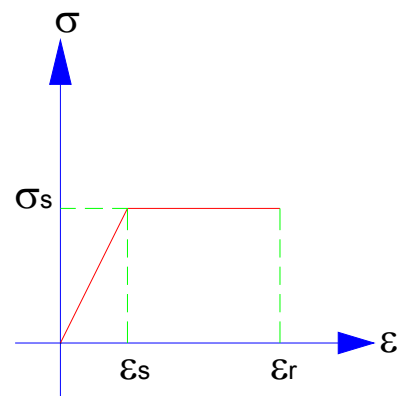
In questo testo, nella trattazione teorica faremo riferimento a due tipi di materiali ideali ed ai relativi diagrammi rappresentanti il legame costitutivo, un materiale ideale perfettamente elastico, ed un materiale che oltre la fase elastica presenta un comportamento perfettamente plastico.

Negli esempi numerici applicativi, utilizzeremo un diagramma tipico dei materiali linearmente elastici per lo studio delle condizioni comuni di esercizio delle strutture che comportano solitamente tensioni di lavoro molto minori di quella di rottura, e un legame perfettamente plastico per lo studio delle resistenze ultime delle sezioni.

Gli esempi che comportano il ricorso a resistenze di calcolo prossime a quelle di rottura o di snervamento del materiale saranno condotti sull'acciaio facendo ricorso appunto al diagramma caratterizzato da un tratto linearmente elastico e da un tratto perfettamente plastico (materiale elastico perfettamente plastico).



Legame linearmente elastico

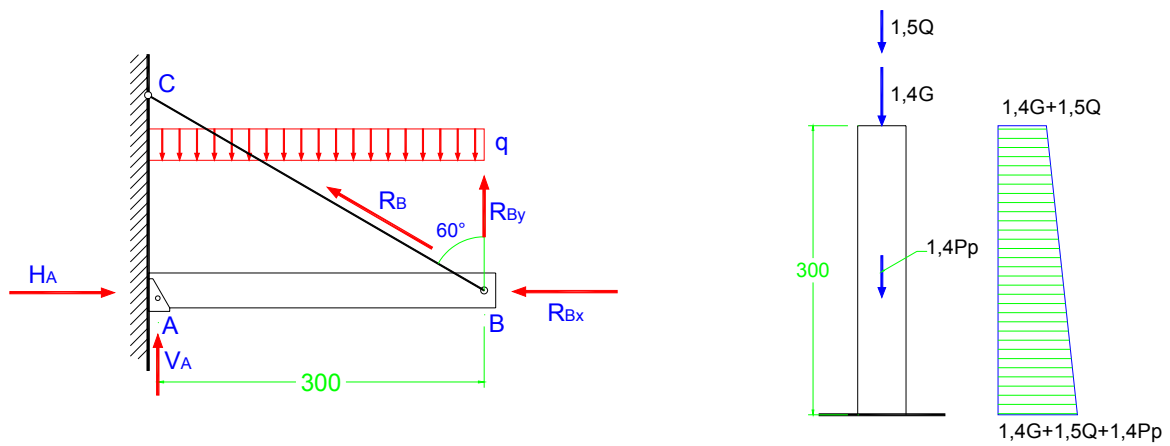


Legame elastico perfettamente plastico

Si riportano appresso alcuni valori tipici delle costanti elastiche per i principali materiali da costruzione.

Materiale	Modulo di Elasticità lineare E (N/mm ²)	Coefficiente di Poisson 1/m	Modulo di elasticità tangenziale G (N/mm ²)
Acciaio	210'000	0,3	80'769
Calcestruzzo	25'000 – 35'000	0,08 – 0,16	11'574 – 15'086
Legno	10'000	0,43	3'496
Muratura	3'000	0,25	1200
Alluminio	70'000	0,35	25'926

IL PROGETTO E LA VERIFICA STRUTTURALE



Resistenza e Sicurezza strutturale

Un progetto strutturale, si sviluppa attraverso le seguenti fasi fondamentali:

1. Individuazione dei modelli strutturali
2. Analisi dei carichi
3. Soluzione dello schema strutturale e determinazione delle caratteristiche della sollecitazione
4. Verifiche di resistenza e sicurezza

Nella prima fase si cerca di interpretare il comportamento reale della struttura e si sceglie quindi il modello strutturale teorico più idoneo a rappresentarlo. Nella seconda fase si determinano i carichi che la struttura reale dovrà sopportare tenendo conto del peso degli elementi costruttivi che la struttura deve sostenere e dei carichi cosiddetti variabili derivanti dall'uso a cui è destinata la costruzione. Combinati fra loro questi carichi in modo da determinare le condizioni più sfavorevoli in relazione alle condizioni da verificare, si risolve lo schema strutturale determinando le caratteristiche della sollecitazione in tutte le sezioni della struttura o almeno nei punti più significativi. La fase successiva è quella della verifica di resistenza, con la quale si confrontano le sollecitazioni di progetto con la capacità di resistenza del materiale costituente la sezione. Oltre alle verifiche di resistenza, solitamente vengono effettuate anche altre verifiche attraverso le quali ci si accerta che la struttura risulti idonea, rispetto a criteri di funzionalità, agli scopi a cui è preposta. Un esempio di tali verifiche è la verifica di deformabilità; con tale verifica ci si accerta che nelle condizioni di esercizio non si evidenzino deformazioni incompatibili con l'uso a cui la struttura è destinata. Un altro esempio di verifica che non riguarda la resistenza può essere la verifica a fessurazione nelle strutture in calcestruzzo armato. Con tale verifica si accerta che le microfessure che si formano per la scarsa resistenza a trazione del calcestruzzo non abbiano ampiezza tale da compromettere la protezione delle armature da fenomeni di ossidazione che comporterebbero un degrado delle prestazioni strutturali nel tempo (requisito di durabilità delle strutture)

Metodi di verifica

I metodi di verifica strutturale più comuni a disposizione del progettista sono:

- Metodo delle tensioni ammissibili (MTA)
- Metodo semiprobabilistico agli Stati Limiti (SL)

Il metodo delle tensioni ammissibili ha una lunga tradizione applicativa ed è tutt'ora consentito dalle normative tecniche Italiane. Il metodo consiste nell'analizzare essenzialmente le condizioni di esercizio delle strutture. I carichi portati in conto nel calcolo strutturale sono quelli caratteristici determinati dalle normali condizioni di esercizio e le tensioni che questi determinano nei materiali costituenti la struttura vanno confrontate con tensioni cosiddette ammissibili ridotte rispetto alle tensioni limite del materiale. Le tensioni ammissibili sono fissate attraverso l'introduzione di opportuni coefficienti di sicurezza e rappresentano il limite massimo accettabile che le tensioni possono raggiungere nelle condizioni di esercizio. Se indichiamo con σ_a la tensione ammissibile questa è esprimibile attraverso al seguente espressione

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{s} \quad \text{dove } s \text{ rappresenta il coefficiente di sicurezza e } \sigma_r \text{ la tensione di rottura.}$$

A titolo di esempio si riportano gli ordini di grandezza dei coefficienti di sicurezza comunemente adottati dalle normative tecniche:

Materiale	Coefficiente s
Acciaio	2 - 3
Calcestruzzo	3 - 4
Legno	3 - 4

Poiché la tensione ammissibile risulta molto minore della tensione di rottura, il materiale può solitamente considerarsi linearmente elastico ed è proprio con tale ipotesi che vengono determinate le tensioni che scaturiscono dalle sollecitazioni applicate alle sezioni delle travi che costituiscono la struttura.

Il metodo semiprobabilistico agli stati limite, si pone l'obiettivo di garantire la sicurezza strutturale in relazione alle diverse situazioni di carico a cui la struttura può essere sottoposta nel corso della sua vita ed alla diversa probabilità che ognuna di queste abbiano di verificarsi durante un certo periodo di riferimento. Vengono sostanzialmente individuati due stati limite di riferimento:

- Stato Limite Ultimo (SLU)
- Stato Limite di Esercizio (SLE)

Con le verifiche allo Stato limite ultimo, ci si propone di determinare le sollecitazioni massime di progetto che hanno una probabilità massima del 5% di essere raggiunte. I carichi da applicare alla struttura sono ottenuti mediante l'applicazione ai carichi convenzionali (caratteristici) di coefficienti maggiorativi ($\gamma = 1,4 \div 1,5$) e di coefficienti di partecipazione ($\phi \leq 1$; coefficienti che tengono conto della probabilità che diversi carichi possano coesistere nello stesso tempo). Trattandosi di sollecitazioni che hanno una bassissima probabilità che si verifichino, si farà ricorso alle resistenze ultime del materiale ridotte mediante un piccolo coefficiente di sicurezza che tiene conto delle incertezze dei valori adottati (per l'acciaio il coefficiente di sicurezza è solitamente compreso tra 1,05 e 1,20). La verifica di resistenza si effettua confrontando le sollecitazioni di progetto con quelle ultime della sezione, o ciò che è lo stesso, confrontando le tensioni derivanti dalle sollecitazioni di progetto con quelle ultime del materiale ridotte del coefficiente di sicurezza.

Poiché il metodo fa ricorso alle resistenze ultime, il legame costitutivo da considerare per il materiale non sempre può essere considerato quello linearmente elastico, ma si dovrà ricorrere ad un legge tensione-deformazioni che simuli con una certa precisione il comportamento reale del materiale. Per l'acciaio potrà con buona approssimazione considerarsi il legame di tipo elastico perfettamente plastico, al quale nel prosieguo del capitolo ci rifaremo in qualche caso per analizzare il comportamento e la resistenza ultima delle sezioni al di fuori del campo elastico.

La determinazione delle resistenze ultime viene eseguita utilizzando una tensione di progetto σ_d ricavata applicando alla tensione di rottura caratteristica σ_r (σ_s - tensione di snervamento per i materiali duttili) un coefficiente di sicurezza γ_m che tenga conto dell'incertezza nella determinazione della resistenza ultima del materiale reale utilizzato.

$$\sigma_d = \frac{\sigma_r}{\gamma_m} \quad \text{oppure per i materiali duttili} \quad \sigma_d = \frac{\sigma_s}{\gamma_m}$$

Indicando con S_u lo stato di sollecitazione massimo (per esempio il massimo momento flettente al quale corrisponde la sollecitazione massima di progetto σ_d), la verifica allo stato limite ultima risulta soddisfatta se risulta $S_d \leq S_u$, dove con S_d si è indicata la massima sollecitazione prevista dal progetto.

La determinazione di S_d si effettua considerando agente sulla struttura combinazioni di carico del tipo:

$$\gamma_g \cdot G + \gamma_q \cdot \sum \phi_i \cdot Q_i$$

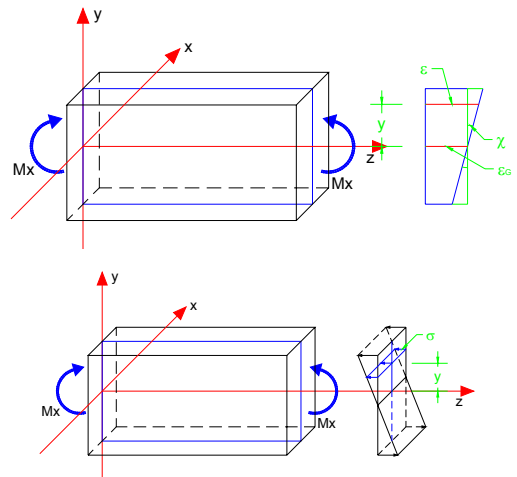
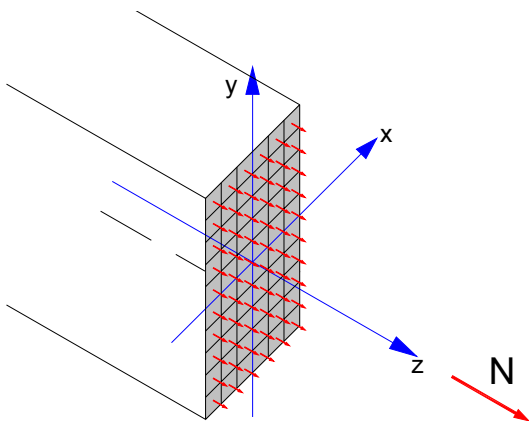
dove :

- G = carichi permanenti (carichi costantemente presenti sulla struttura)
- Q_i = carichi variabili (carichi derivanti dall'uso della struttura)
- γ_g = coefficiente di sicurezza parziale dei carichi permanenti (solitamente $\gamma_g = 1,4$)
- γ_q = coefficiente di sicurezza parziale dei carichi variabili (solitamente $\gamma_q = 1,5$)

- φ_i = coefficiente di combinazione dei carichi variabili (=1 se è applicato un solo carico variabile)

Le verifiche allo stato limite di esercizio coincidono con buona sostanza a quelle che vengono effettuate con il metodo delle tensioni ammissibili. Oltre a verificare che le tensioni nelle normali condizioni di esercizio si mantengano nel campo elastico ed entro tensioni limite fissate mediante l'applicazione di opportuni coefficienti di sicurezza, vengono verificate anche condizioni di funzionalità, come la deformazione, e le condizioni di durabilità strutturale come condizioni di eccessiva fessurazione o di altre azioni che possano comportare nel tempo il degrado della struttura. Per le verifiche di esercizio, poiché le tensioni di lavoro del materiale sono sufficientemente al di sotto dei valori critici, può considerarsi un legame costitutivo di tipo linearmente elastico.

IL CAMPO TENSIONALE E LE VERIFICHE DI RESISTENZA



Il campo tensionale nelle sezioni

Nello studio delle strutture composte da elementi trave, si determinano le caratteristiche della sollecitazione che agiscono su ogni sezione della trave. L'obiettivo che ci poniamo ora è quello di determinare il campo tensionale nella sezione a partire dalla conoscenza dei valori delle singole caratteristiche della sollecitazione.

Per fare ciò affronteremo il problema ponendo alcune ipotesi, tra cui la fondamentale è la validità del cosiddetto principio di De Saint Venant.

Il principio di De Saint Venant afferma che: *in una sezione posta ad una sufficiente distanza dal punto in cui sono applicate le forze esterne, la distribuzione delle tensioni non risente della effettiva distribuzione delle forze applicate, ma dipende esclusivamente dalla risultante e dal momento risultante di quest'ultime.*

Ulteriori ipotesi che considereremo nella ricerca del campo tensionale sono:

1. *Il materiale costituente la trave è omogeneo ed isotropo*
2. *Le sezioni, seppur deformate si conservano piane e perpendicolare all'asse della trave. Tale circostanza comporta che le deformazioni saranno distribuite con legge lineare all'interno della sezione.*
3. *Il materiale ha un comportamento linearmente elastico. Il comportamento linearmente elastico del materiale comporta la validità della legge di Hooke e quindi la diretta proporzionalità tra tensioni e deformazione.*

Lo studio del campo tensionale effettuato in campo elastico lineare, sarà esteso successivamente al campo perfettamente plastico così da analizzare le capacità di resistenza ultime delle sezioni.

Per ogni condizione di sollecitazione analizzata, saranno proposti esempi applicativi numerici. In particolare i risultati in campo elastico saranno utilizzati per l'applicazione del metodo di verifica alle tensioni ammissibili, mentre i risultati in campo plastico forniranno l'occasione per esempi di progetto e verifica strutturali condotte con il metodo semiprobabilistico agli stati limite.

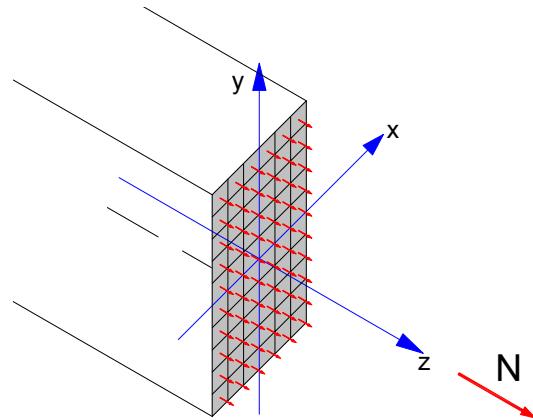
Per lo studio della distribuzione delle tensioni sarà fatto dapprima riferimento a stati di sollecitazione semplice, costituiti cioè da un'unica caratteristica della sollecitazione, per poi estendere i risultati ai casi di sollecitazione composta.

La sollecitazione di sforzo Normale semplice

Si supponga di avere una sezione sollecitata esclusivamente a sforzo Normale. Sulla sezione può quindi considerarsi agente la sola forza N la quale risulta applicata nel baricentro della sezione.

Se si immagina di suddividere la sezione in tante areole uguali di superficie unitaria indicata con a , su ognuna di queste si può pensare che sia applicata una tensione normale σ_i . Per l'equilibrio tra la risultante delle forze tensionali interne e la forza esterna applicata, dovrà essere verificata la seguente relazione:

$$\sum a \cdot \sigma_i = N$$



Poiché l'unica forza esterna è la N e risulta applicata nel baricentro, anche la risultante delle forze tensionali deve essere baricentrica.

Tenendo presente l'ipotesi di conservazione piana delle sezioni e l'ipotesi di elasticità lineare, ne consegue che anche la distribuzione delle tensioni deve essere lineare, infatti per la legge di Hooke può scriversi la seguente relazione:

$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon_i \text{ e quindi } E \cdot \sum a \cdot \varepsilon_i = N$$

Non essendoci alcun momento flettente applicato, la sezione non può subire rotazioni e quindi la deformazione ε deve essere la stessa in ogni punto della sezione. Se la deformazione avviene in maniera costante sulla sezione, per la legge di Hooke anche la tensione σ risulterà costante in ogni punto della sezione e la risultante delle forze tensionali risulterà baricentrica come ci si aspettava per la condizione di equilibrio prima invocata.

Accertato quindi che la tensione è costante in ogni punto la condizione di equilibrio diventa:

$$\sum a \cdot \sigma_i = \sigma \cdot \sum a = N$$

Poiché la somma di tutte le areole nelle quali è stata suddivisa la sezione altro non è che l'area A della sezione si ricava che:

$$\sigma \cdot A = N$$

e quindi che in una sezione soggetta allo sforzo normale N la tensione σ è data dal rapporto tra lo sforzo normale N e l'area della sezione A .

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Conosciuta la tensione σ , può calcolarsi la deformazione unitaria ε :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{E \cdot A}$$

Considerando un tratto di trave di lunghezza L soggetto ad uno sforzo normale N costante lungo tutto il tratto, il tratto si deformerà in maniera uniforme e subirà la variazione di lunghezza ΔL che può calcolarsi con la formula che segue:

$$\Delta L = L \cdot \varepsilon = \frac{N}{E \cdot A} \cdot L$$

La trave subirà un allungamento se lo sforzo Normale è di trazione mentre subirà un accorciamento se lo sforzo Normale è di compressione. Ricordando che N è definito positivo se di trazione e negativo se di compressione, ΔL , ε , σ , assumeranno coerentemente lo stesso segno di N .

Assunto che l'asse della trave è l'asse z , e che la trave è soggetta in ogni sezione allo sforzo Normale costante e pari a N , l'unica componente tensionale diversa da zero è la tensione normale che assume il seguente valore:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}$$

La trave nella direzione dell'asse z presenterà una variazione di lunghezza pari a :

$$\Delta L = L \cdot \varepsilon_z = \frac{N}{E \cdot A} \cdot L$$

In ogni sezione si registrerà una deformazione unitaria lungo le direzioni x e y pari a:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\varepsilon_z}{m} = -\frac{\sigma_z}{E \cdot m} = -\frac{N}{E \cdot m \cdot A}$$

dove $\frac{1}{m}$ è il coefficiente di Poisson del materiale.

Verifiche di resistenza e progetto delle sezioni

La distribuzione costante delle σ nella sezione sotto l'azione di uno sforzo Normale \mathbf{N} , determina l'indifferenza procedurale delle verifiche in campo elastico da quelle in campo plastico. Se immaginiamo di applicare e di far crescere lentamente uno sforzo \mathbf{N} su una sezione costituita da un materiale con legame elastico perfettamente plastico, finché la tensione σ risulterà inferiore alla tensione di snervamento la deformazione crescerà in maniera proporzionale secondo il coefficiente di elasticità lineare, raggiunta la tensione di snervamento, il materiale si plasticizza e non sarà più in grado di sopportare incrementi dello sforzo Normale \mathbf{N} . Sotto il valore massimo di \mathbf{N} la deformazione crescerà fino a raggiungere la rottura del materiale, mentre la tensione si mantiene costante e pari a quella di snervamento. Il valore \mathbf{N} a cui corrisponde una tensione pari alla tensione di snervamento è quindi il massimo sforzo Normale che la sezione può sopportare e si pone pari N_u (sforzo normale ultimo). Una sezione soggetta a sforzo Normale centrato verifica le condizioni di resistenza se lo sforzo Normale di progetto (sforzo normale massimo a cui sarà soggetta la sezione) è inferiore allo sforzo Normale ultimo della sezione.

Verifica allo S.L.U.

Per il metodo semiprobabilistico allo stato limite, ed in particolare per la verifica allo stato limite ultimo (S.L.U.), indicando con N_d (il pedice d sta per design) lo sforzo normale di progetto, la verifica di resistenza risulta soddisfatta se risulta:

$$N_d \leq N_u \quad \text{o ciò che è lo stesso:} \quad \frac{N_u}{N_d} \geq 1$$

Le normative tecniche prescrivono che la determinazione delle resistenze ultime, nel caso specifico N_u , venga eseguita utilizzando una tensione di progetto σ_d ricavata applicando alla tensione di rottura caratteristica σ_r (σ_s - tensione di snervamento per i materiali duttili) un coefficiente di sicurezza γ_m che tenga conto dell'incertezza nella determinazione della resistenza ultima del materiale reale utilizzato.

$$\sigma_d = \frac{\sigma_r}{\gamma_m} \quad \text{oppure per i materiali duttili} \quad \sigma_d = \frac{\sigma_s}{\gamma_m}$$

Assegnata una sezione di Area **A**, lo sforzo normale ultimo N_u sarà dato quindi da:

$$N_u = A \cdot \sigma_d$$

La sollecitazione massima di progetto N_d viene determinata considerando agente sulla struttura la combinazione di carico seguente:

$$\gamma_g \cdot G + \gamma_q \cdot \sum \varphi_i \cdot Q_i$$

attribuendo ai valori caratteristici dei carichi ed ai coefficienti relativi gli opportuni valori fissati dalle norme a seconda della struttura considerata.

Progetto allo S.L.U.

Il progetto di un elemento soggetto a sforzo normale centrato, si effettua nel modo che segue: Si considera l'elemento soggetto alla combinazione di carico relativa allo S.L.U. e si determina quindi il valore di N_d .

Scelto il materiale da utilizzare si determina la tensione massima di progetto con la formula:

$$\sigma_d = \frac{\sigma_r}{\gamma_m}$$

riducendo la tensione caratteristica di rottura attraverso l'applicazione del coefficiente di sicurezza relativo al materiale fissato dalle norme.

La determinazione dell'area minima necessaria per la sezione resistente si determina quindi con la formula:

$$A = \frac{N_d}{\sigma_d}$$

Si traduce quindi nella forma geometrica voluta l'area minima appena determinata.

Verifiche di resistenza in esercizio (S.L.E.)

Per alcuni materiali le norme prescrivono le sollecitazioni massime consentite per le verifiche in esercizio. In tali casi si procede nel modo che segue. Si determina lo sforzo Normale in esercizio N_e attraverso l'applicazione della seguente condizione di carico in esercizio:

$$G + Q$$

ottenuta assegnando ai coefficienti parziali di sicurezza il valore 1. Si determina la sollecitazione ammissibile

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{\gamma_m}$$

dove al coefficiente di sicurezza γ_m è assegnato il valore previsto dalle norme per le verifiche in esercizio. Si determina quindi la tensione normale derivante dallo sforzo Normale di esercizio e la si confronta con la tensione ammissibile. La verifica è soddisfatta se la tensione di lavoro è inferiore a quella ammissibile.

$$\sigma = \frac{N_e}{A} \leq \sigma_a$$

Progetto e verifica con il metodo delle tensioni ammissibili (M.T.A.)

Il M.T.A. si caratterizza in quanto si limita a progettare e a verificare le strutture nella sola fase di esercizio. Lo sforzo normale di progetto è ottenuto dall'applicazione dei carichi caratteristici previsti per la fase di esercizio. Le norme inoltre fissano la tensione ammissibile del materiale da utilizzare nelle verifiche. La verifica è soddisfatta se la tensione di lavoro risulta inferiore o al massimo uguale alla tensione ammissibile.

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_a$$

Il progetto della sezione può effettuarsi determinando l'area minima che la sezione deve avere lavorando alla tensione ammissibile sotto lo sforzo Normale applicato.

$$A = \frac{N}{\sigma_a}$$

L'area necessaria viene realizzata quindi nella forma geometrica voluta.

Il metodo delle tensioni ammissibili corrisponde formalmente alle verifiche allo S.L.E., ma le norme, seppure a parità di carico e di sollecitazione, prescrivono solitamente tensioni ammissibili più cautelative se per il progetto si adotta il metodo delle tensioni ammissibili.

Esempi applicativi

Esempio 1

Si progetti la sezione di un pilastro in muratura di mattoni pieni alto 3,00 m. e soggetto in testa a due carichi centrati, $G=150$ KN di tipo permanente e $Q=70$ KN di tipo variabile. La tensione di rottura a compressione della muratura è pari a $\sigma_r = 5$ MPa mentre il coefficiente di sicurezza del materiale è da assumere pari a 3 se si adotta il metodo semiprobabilistico agli stati limite e pari a 5 se si adotta il metodo delle tensioni ammissibili. Il peso specifico della muratura può essere assunto pari a 18 KN/m³.

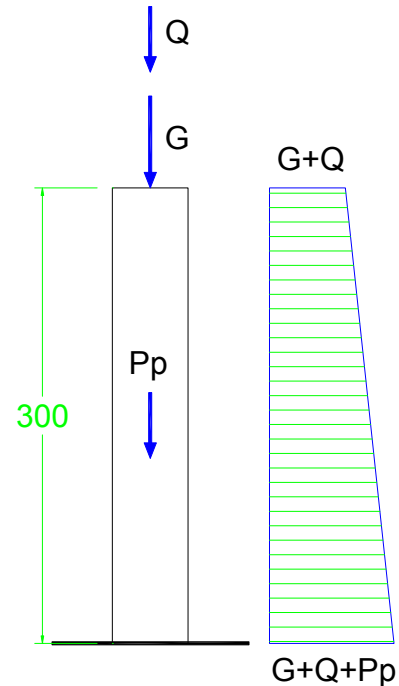
M.T.A.

Nella figura a fianco è rappresentato il modello strutturale ed il diagramma dello sforzo Normale. Per i M.T.A. i carichi da applicare sono quelli caratteristici nelle condizioni di esercizio, quindi agirà in testa al pilastro lo sforzo Normale

$$N = G + Q = 150 + 70 = 220 \text{ KN}$$

Al piede del pilastro invece lo sforzo Normale sarà pari a quello in testa maggiorato del peso proprio del pilastro stesso. Il diagramma dello sforzo Normale varierà linearmente dal valore di testa a quello di piede. La sezione più sollecitata è quella di piede, ma il peso proprio della muratura possiamo calcolarlo solo dopo aver dimensionato la sezione. Procederemo in questo modo:

- 1) Eseguiremo il progetto tenendo conto inizialmente dello sforzo Normale agente in testa al pilastro;
- 2) Determinata la sezione geometrica del pilastro calcoleremo il peso proprio;
- 3) Eseguiremo le verifiche nella sezione al piede (sezione più sollecitata) e se non saranno soddisfatte ingrandiremo la sezione procedendo quindi con un secondo tentativo di progetto.



Fase di progetto

La tensione ammissibile della muratura si ottiene dividendo la tensione di rottura per il coefficiente di sicurezza assegnato per il M.T.A..

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{s} = \frac{5}{5} = 1 \text{ MPa}$$

Si procede quindi alla determinazione della sezione minima per la quale sotto lo sforzo Normale N si avrebbe una tensione di lavoro pari proprio alla tensione ammissibile.

Si ricorda che $1 \text{ MPa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

$$A = \frac{N}{\sigma_a} = \frac{220 \cdot 10^3 \text{ N}}{1 \text{ MPa}} = 220 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

Volendo realizzare la sezione del pilastro di forma quadrata, la dimensione del lato minimo necessario si ottiene con la formula:

$$l = \sqrt{A} = \sqrt{220 \cdot 10^3} = 469 \text{ mm}$$

Per resistere allo sforzo Normale assegnato, avremo bisogno di un pilastro il cui lato sia almeno pari a 469 mm. Tenendo conto della dimensione standard dei mattoni pieni (12x25x5,5 cm) per soddisfare la dimensione minima richiesta, dovremo optare per una sezione a 4 teste che corrisponde ad un lato pari a 51 cm.

Fase di verifica

Assegnata la sezione possiamo determinare il peso del pilastro attraverso il prodotto del volume del pilastro per il peso specifico della muratura.

$$P_p = 0,51 \cdot 0,51 \cdot 3,00 \cdot 18 = 14,045 \text{ KN}$$

Lo sforzo Normale che agisce sulla sezione più sollecitata (al piede del pilastro) è pari a:

$$N = G + Q + P_p = 150 + 70 + 14,045 = 234,045 \text{ KN} = 234,045 \cdot 10^3 \text{ N}$$

L'area della sezione del pilastro adottata è pari a:

$$A = 510^2 = 260,1 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

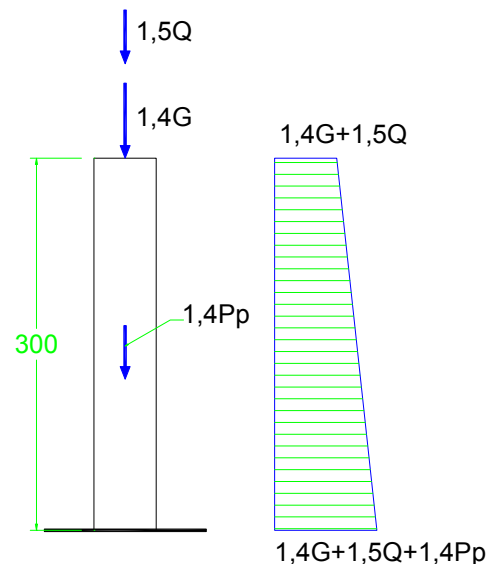
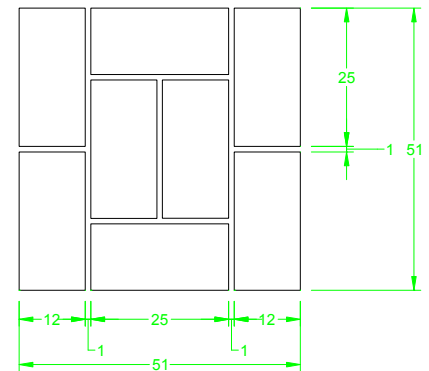
Determiniamo quindi la tensione di lavoro e la confrontiamo con la tensione ammissibile

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{234,045 \cdot 10^3}{260,1 \cdot 10^3} = 0,90 \text{ MPa} < \sigma_a$$

La tensione di lavoro risulta minore della tensione ammissibile e quindi la verifica è soddisfatta.

S.L.U.

Adottando il metodo semiprobabilistico allo stato limite, il progetto e le verifiche allo stato limite ultimo (S.L.U.), va condotto considerando applicando ai carichi di tipo permanente un coefficiente moltiplicativo pari a 1,4 ed ai carichi di tipo variabile un coefficiente moltiplicativo pari a 1,5. Nella figura a lato è riportato il modello strutturale ed il relativo diagramma dello sforzo Normale. Anche in questo caso, procederemo dapprima ad eseguire il procedimento di progetto utilizzando lo sforzo Normale che si verifica in testa al pilastro per poi, una volta determinata la sezione e quindi il peso del pilastro stesso, eseguire le verifiche nella sezione più sollecitata.



La tensione ultima di progetto da adottare è quella che si ottiene applicando alla tensione di rottura il coefficiente di sicurezza del materiale che in questo caso è pari a 3.

$$\sigma_d = \frac{\sigma_r}{\gamma_m} = \frac{5 \text{ MPa}}{3} = 1,67 \text{ MPa}$$

Fase di progetto

Lo sforzo Normale in testa al pilastro è pari a:

$$N_d = 1,4 \cdot G + 1,5 \cdot Q = 1,4 \cdot 150 + 1,5 \cdot 70 = 315 \text{KN} = 315 \cdot 10^3 \text{N}$$

L'area minima della sezione resistente si determina ipotizzando che il materiale lavori alla tensione ultima di progetto.

$$A = \frac{N_d}{\sigma_d} = \frac{315 \cdot 10^3 \text{N}}{1,67 \text{MPa}} = 188,623 \cdot 10^3 \text{mm}^2$$

Volendo progettare una sezione del pilastro quadrata, il lato minimo della sezione che soddisfa la condizione di progetto si determina calcolando la radice quadrata dell'area della sezione.

$$l = \sqrt{A} = \sqrt{188,623 \cdot 10^3} = 434 \text{mm}$$

Tenendo conto delle dimensioni dei mattoni standard, si adotta una sezione a 4 teste che corrisponde ad una dimensione del lato della sezione pari a 510mm.

Fase di verifica

Assegnate le dimensioni della sezione determiniamo il peso del pilastro e lo sforzo Normale massimo di progetto che si verifica al piede del pilastro.

$$P_p = 0,51 \cdot 0,51 \cdot 3,00 \cdot 18 = 14,045 \text{KN}$$

Poiché il peso proprio degli elementi strutturali è un carico di tipo permanente, nelle verifiche allo S.L.U. questo dovrà essere amplificato del coefficiente parziale di sicurezza pari 1,4. Lo sforzo Normale massimo al piede del pilastro vale quindi:

$$N_d = 1,4 \cdot G + 1,4 \cdot P_p + 1,5 \cdot Q = 1,4 \cdot 150 + 1,4 \cdot 14,045 + 1,5 \cdot 70 = 334,66 \text{KN}$$

Lo sforzo Normale ultimo che la sezione è in grado di sopportare si ottiene moltiplicando l'area della sezione per la tensione ultima di progetto.

$$N_u = A \cdot \sigma_d = 188,623 \cdot 10^3 \cdot 1,67 = 314,900 \cdot 10^3 \text{N} = 314,900 \text{KN}$$

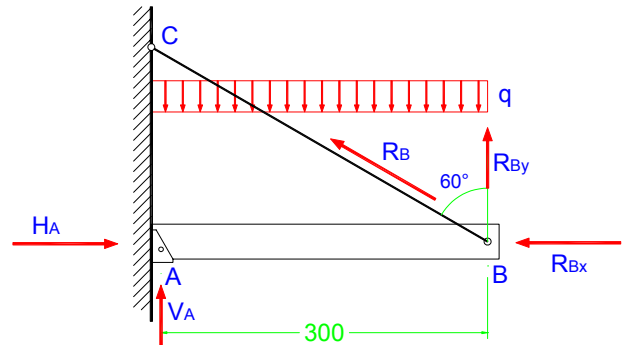
La verifica si conduce confrontando la sollecitazione massima di progetto con la sollecitazione ultima della sezione.

$$N_d < N_u \quad \text{o anche} \quad \frac{N_u}{N_d} = \frac{314,900}{334,66} \cong 0,94 > 1 \quad \text{La verifica è soddisfatta}$$

Il rapporto tra la sollecitazione ultima e la sollecitazione di progetto ci fornisce anche un apprezzamento numerico della verifica. Nel caso specifico il pilastro sarebbe in grado di sopportare una sollecitazione anche maggiore del 30% circa di quella di progetto.

Esempio 2

Si consideri la pensilina a sbalzo riportata in figura. La trave è vincolata alla parete con una cerniera ed in punta è sorretta da un tirante pendolare inclinato di 60° rispetto alla verticale e costituito da due tondini di acciaio avente tensione caratteristica di snervamento pari a 235 MPa (Fe 360). Si vuole progettare la sezione dei tondini costituenti il tirante considerando che sulla trave agiscono i seguenti carichi caratteristici uniformemente distribuiti:
 $G=12\text{KN/m}$; $Q=6,60\text{KN/m}$.



La struttura rappresenta uno schema di trave isostatica ed in figura anche il sistema di forze costituito dalle reazioni vincolari e dal carico uniformemente distribuito q che carica la trave. Il valore del carico q dipende dal metodo di verifica adottato.

Il sistema risolutivo dello schema strutturale è il seguente:

$$\begin{cases} H_A - R_{BX} = 0 \\ V_A - 3 \cdot q + R_{BY} = 0 \\ 3 \cdot q \cdot 1,5 - 3 \cdot R_{BY} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A - R_B \cdot \sin 60^\circ = 0 \\ V_A - 3 \cdot q + R_B \cdot \cos 60^\circ = 0 \\ 3 \cdot q \cdot 1,5 - 3 \cdot R_B \cdot \cos 60^\circ = 0 \end{cases}$$

Poiché ai fini dello svolgimento dell'esercizio ci interessa di determinare solo il valore di R_B , ci limiteremo ad utilizzare solo la terza equazione con la quale si ottiene il valore cercato.

$$R_B = \frac{1,5 \cdot q}{\cos 60^\circ}$$

Il segno di R_B è positivo, quindi il pendolo **BC** eserciterà sulla trave la forza R_B con verso identico a quello riportato in figura. Sul pendolo agirà di conseguenza la forza uguale ed opposta che comporta quindi sul pendolo uno sforzo Normale di trazione. Il pendolo si comporta appunto come un tirante.

M.T.A. (metodo delle tensioni ammissibili)

Fase di progetto

Per il metodo delle tensioni ammissibili la combinazione di carico da considerare è quella determinata dai carichi caratteristici permanenti e variabili.

$$q = G + Q = 12 + 6,60 = 18,60 \text{KN/m}$$

Lo sforzo normale di trazione è fornito dal valore di R_B

$$N = R_B = \frac{1,5 \cdot q}{\cos 60^\circ} = \frac{1,5 \cdot 18,60}{\cos 60^\circ} = 55,8 \text{KN} = 55,8 \cdot 10^3 \text{N}$$

La tensione ammissibile dell'acciaio da utilizzare è pari a $\sigma_a = 160 \text{MPa}$

L'area minima di ferro necessaria si ottiene considerando che l'acciaio lavori con un valore di tensione pari proprio a quella massima ammissibile.

$$A = \frac{N_d}{\sigma_d} = \frac{80,1 \cdot 10^3}{223,8} \cong 358 \text{ mm}^2$$

Il diametro minimo richiesto per la sezione dei due tondini che costituiscono il tirante è pari a:

$$\frac{A}{2} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{2 \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 358}{2 \cdot \pi}} = 15,1 \text{ mm}$$

Si adottano due tondini $\Phi 16$.

Fase di verifica allo S.L.U.

L'area effettiva del tirante sarà pari quindi a:

$$A = 2 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 16^2}{4} \cong 402 \text{ mm}^2$$

Lo sforzo Normale ultimo del tirante è pari a:

$$N_u = A \cdot \sigma_d = 402 \cdot 223,8 = 89,97 \cdot 10^3 \text{ N} = 89,97 \text{ KN}$$

Il confronto tra lo sforzo Normale di progetto e lo sforzo Normale ultimo ci conferma il soddisfacimento della verifica allo S.L.U.

$$\frac{N_u}{N_d} = \frac{89,97}{80,1} = 1,12 > 1 \quad \text{la verifica è soddisfatta.}$$

Verifica allo S.L.E.

Per il caso specifico si ritiene di verificare che nella fase di esercizio le tensioni nel materiale costituente il tirante si mantengano sufficientemente al di sotto del limite elastico. Viene quindi definita una tensione massima di esercizio attraverso la riduzione della tensione di snervamento con un opportuno coefficiente di sicurezza.

$$\sigma_d = 0,7 \cdot \sigma_s = 0,7 \cdot 235 = 164,5 \text{ MPa}$$

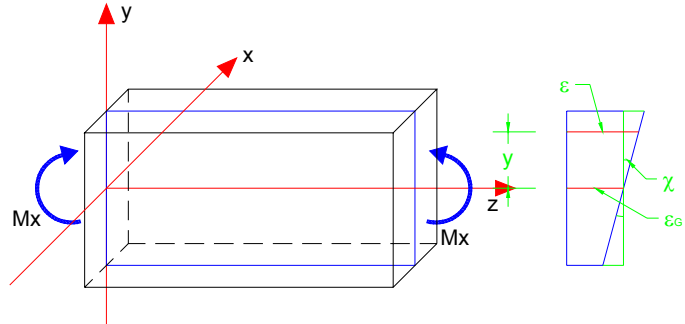
Nella condizione di esercizio i carichi applicati sulla struttura sono pari proprio ai carichi caratteristici, quindi lo sforzo Normale in esercizio assume lo stesso valore di quello utilizzato con il metodo delle tensioni ammissibili.

$$N_e = 55,8 \text{ KN} = 55,8 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\sigma = \frac{N_e}{A} = \frac{55,8 \cdot 10^3}{402} \cong 139 \text{ MPa} < \sigma_d \quad \text{La verifica è soddisfatta}$$

La sollecitazione di Flessione retta (semplice)

Si consideri un tronco di trave (solido alla De Saint Venant) ed il sistema di riferimento interno z, x, y , di cui l'asse z coincidente con l'asse della trave e gli assi x e y coincidenti con gli assi principali d'inerzia della sezione. La sollecitazione è di flessione retta se l'unica azione considerata esterna al solido è costituita dal momento flettente intorno ad uno degli assi principali d'inerzia della sezione. Nel caso in esame l'unica sollecitazione applicata è il momento M_x supposto positivo. Con queste ipotesi l'unica tensione non nulla è la σ_z , infatti non essendoci alcuna azione esterna agente lungo la superficie laterale dovranno risultare nulle le σ_x , σ_y e la τ_{xy} . L'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, comporta che la deformazione ε vari linearmente lungo la direzione y . Assunta una generica distribuzione lineare delle ε e denominato con ε_G la deformazione della fibra baricentrica e con χ l'angolo che individua la pendenza del diagramma delle ε , per l'ipotesi di piccoli spostamenti può confondersi la tangente dell'angolo con l'angolo e quindi si può scrivere:



$$\varepsilon = \varepsilon_G + \chi \cdot y \quad \text{e per l'ipotesi di elasticità lineare} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot (\varepsilon_G + \chi \cdot y)$$

Se immaginiamo di suddividere l'area della sezione in tante areole piccole di area unitaria su ognuna delle quali è applicata una forza tensionale, le condizioni di equilibrio alla traslazione in direzione z ed alla rotazione intorno a x si scrivono:

$$\begin{cases} N = \sum a_i \cdot \sigma_i = 0 \\ M_x = -\sum a_i \cdot \sigma_i \cdot y_i \end{cases}$$

Il segno negativo nella seconda equazione si giustifica considerando che tensioni positive generano momenti orari per y positivo, mentre il momento flettente positivo applicato sulla sezione corrisponde ad una coppia antioraria. Sostituendo nelle equazioni di equilibrio l'espressione che lega le tensioni alle deformazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} N = \sum a_i \cdot E \cdot (\varepsilon_G + \chi \cdot y_i) = 0 \\ M_x = -\sum a_i \cdot E \cdot (\varepsilon_G + \chi \cdot y_i) \cdot y_i \end{cases}$$

Sviluppando la prima equazione si ottiene:

$$\sum a_i \cdot E \cdot (\varepsilon_G + \chi \cdot y_i) = E \cdot \varepsilon_G \cdot \sum a_i + E \cdot \chi \cdot \sum a_i \cdot y_i = E \cdot \varepsilon_G \cdot A + E \cdot \chi \cdot S_x = 0$$

Considerando che l'asse x è un asse baricentrico il momento statico S_x è nullo e quindi:

$$E \cdot \varepsilon_G \cdot A = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_G = 0$$

La deformazione e quindi anche la tensione relativa alla fibra baricentrica è nulla. L'asse lungo il quale la tensione è nulla è detto asse neutro, e quindi nella flessione retta l'asse neutro coincide con l'asse baricentrico.

Sviluppando la seconda equazione si ottiene:

$$M_x = -\sum a_i \cdot E \cdot (\varepsilon_G + \chi \cdot y_i) \cdot y_i = -E \cdot \varepsilon_G \cdot \sum a_i \cdot y_i - E \cdot \chi \cdot \sum a_i \cdot y_i^2$$

$$M_x = -E \cdot \varepsilon_G \cdot S_x - E \cdot \chi \cdot J_x$$

Considerando che il momento statico S_x è nullo si ricava:

$$M_x = -E \cdot \chi \cdot J_x \quad \Rightarrow \quad \chi = -\frac{M_x}{E \cdot J_x}$$

La quantità $\chi = -\frac{M_x}{E \cdot J_x}$ esprime la rotazione della sezione retta considerata e quindi l'asse di un

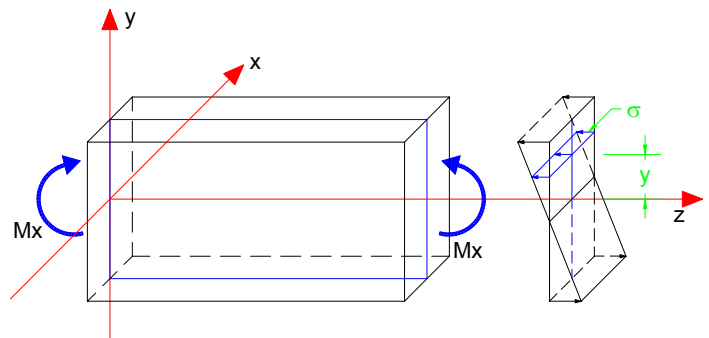
tratto di trave soggetto ad un momento costante si deforma presentando una curvatura costante espressa proprio dal rapporto tra il Momento flettente agente ed il prodotto tra il modulo elastico del materiale ed il momento d'inerzia rispetto all'asse intorno al quale ruota la sezione.

Sostituendo il valore della curvatura trovato nell'espressione che lega tensioni e deformazioni, e ricordando che la deformazione ε_G della fibra baricentrica è nulla, si ottiene l'espressione che ci fornisce la tensione σ al variare di dell'ordina y della fibra considerata.

$$\sigma = E \cdot (\varepsilon_G + \chi \cdot y) = -E \cdot \frac{M_x}{E \cdot J_x} \cdot y \quad \Rightarrow \quad \sigma = -\frac{M_x}{J_x} \cdot y$$

Per momenti flettenti positivi si ottengono tensioni negative (di compressione) per le fibre poste al di sopra di x e tensioni positive (di trazione) per fibre poste al disotto di x . La tensione è nulla per $y=0$; l'asse x è l'asse neutro.

In figura è rappresentato il diagramma solido delle tensioni che si ottiene su una sezione soggetta a flessione semplice. Tale diagramma può intendersi anche come diagramma della deformazione a meno del coefficiente di proporzionalità E (costante elastica). Spesso in pratica, si omette di considerare il segno algebrico nella formula delle tensioni, riconoscendo a



priori fisicamente se la tensione cercata è di compressione o di trazione. Inoltre, se il materiale ha la stessa resistenza a trazione ed a compressione, nelle verifiche interessa conoscere solo massima tensione in valore assoluto che si ha sulla sezione, quindi si applicherà la formula delle tensioni considerando per y la distanza della fibra più lontana dall'asse neutro.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_{\max}$$

Nella formula appena riportata, poiché l'asse x è asse baricentrico, sia il momento d'inerzia sia la distanza della fibra più lontana dal baricentro sono grandezze che dipendono esclusivamente dalla geometria della sezione.

Posto: $W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$

l'espressione che ci fornisce la tensione diventa: $\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$

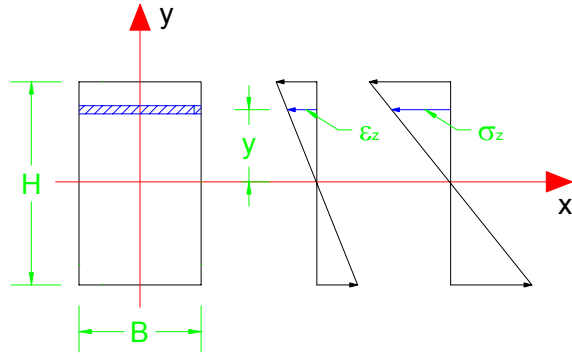
dove W_x rappresenta il **modulo di resistenza elastico** della sezione.

Per ottenere una più pratica rappresentazione grafica dello stato tensionale in una sezione, si preferisce rappresentare la sezione nel piano con a fianco il diagramma che esprime la variabilità delle σ_z lungo l'asse y della sezione. Nella figura è riportato il diagramma delle tensioni in una sezione rettangolare soggetta ad un momento flettente positivo. Nel caso specifico poiché l'asse neutro divide la sezione in due parti uguali la massima tensione di trazione e la massima tensione di compressione attingono lo stesso valore. Il valore assoluto massimo della tensione si ottiene attraverso la formula:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$$

Il modulo di resistenza elastico di una sezione rettangolare di base B ed altezza H , assume la seguente forma:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{\frac{B \cdot H^3}{12}}{\frac{H}{2}} = \frac{B \cdot H^3}{12} \cdot \frac{2}{H} = \frac{B \cdot H^2}{6}$$



Progetto e verifica in fase elastica (M.T.A.) di sezioni inflesse

Il progetto di una sezione inflessa viene condotto determinando il modulo di resistenza minimo che la sezione deve possedere affinché la tensione in esercizio non superi la tensione ammissibile del materiale. Determinato il momento flettente massimo a cui sarà soggetta la sezione e definito il materiale con il quale sarà realizzata la sezione, il modulo di resistenza elastico minimo sarà dato dall'espressione che segue:

$$W_x = \frac{M_x}{\sigma_a}$$

A questo punto se la sezione è rettangolare, si possono determinare le dimensioni geometriche attraverso una delle due relazioni che seguono.

$$W_x = \frac{B \cdot H^2}{6} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{6 \cdot W_x}{H^2} \\ H = \sqrt{\frac{6 \cdot W_x}{B}} \end{cases}$$

Entrambe le relazioni impongono che sia fissata una delle due dimensioni geometriche per determinare l'altra. In alcuni casi però si possono fissare delle relazioni aggiuntive che legano le dimensioni B e H . Nelle sezioni in legno massiccio, per esempio, per motivi di razionalizzazione dell'uso del materiale base, vengono realizzate sezioni rettangolari per le quali sussistono i determinati rapporti tra B e H che consentono di specializzare le formule sopra riportate.

Considerato uno di questi rapporti per il quale si pone $B = \frac{5}{7} \cdot H$, la formula di progetto che ci consente di determinare **H** diventa:

$$W_x = \frac{B \cdot H^2}{6} = \frac{5}{7} \cdot \frac{H \cdot H^2}{6} = \frac{5 \cdot H^3}{42} \quad \Rightarrow \quad H = \sqrt[3]{\frac{42 \cdot W_x}{5}}$$

Facciamo un esempio numerico.

Vogliamo progettare una sezione rettangolare in legno massiccio idonea a sopportare un Momento flettente **M_x** in esercizio pari a 12KNm. Possiamo adottare una tensione ammissibile pari a 10MPa.

Calcoliamo il modulo di resistenza elastico della sezione da progettare.

$$W_x = \frac{M_x}{\sigma_a} = \frac{12 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

Volendo progettare una sezione rettangolare nella quale $B = \frac{5}{7} \cdot H$ la formula che ci fornisce l'altezza H della sezione è:

$$H = \sqrt[3]{\frac{42 \cdot W_x}{5}} = \sqrt[3]{\frac{42 \cdot 1,2 \cdot 10^6}{5}} = 100 \cdot \sqrt[3]{\frac{42 \cdot 1,2}{5}} \cong 216 \text{ mm}$$

Si adotta una sezione con altezza H=220mm.

La base B si ricava quindi attraverso la fissata relazione tra B e H:

$$B = \frac{5}{7} \cdot H = \frac{5}{7} \cdot 220 \cong 157 \text{ mm}$$

Si adatterà quindi una B=160mm.

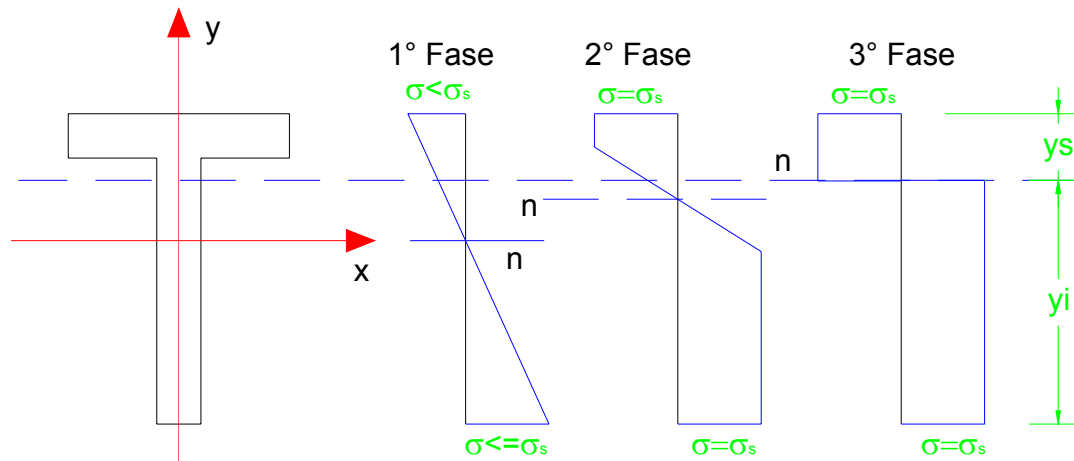
La sezione è stata progettata. Per effettuare la verifica occorrerà determinare il modulo di resistenza elastico della sezione adottata e calcolare la tensione di lavoro per confrontarla con la tensione ammissibile.

$$W_x = \frac{B \cdot H^2}{6} = \frac{160 \cdot 220^2}{6} = 1,29 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{12 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{1,29 \cdot 10^6 \text{ mm}^3} = 9,3 \text{ MPa} < \sigma_a \quad \text{la verifica è soddisfatta.}$$

Per il progetto e la verifica di sezioni di forma diversa dalla rettangolare, si fa ricorso solitamente ad appositi sagomari. E' il caso delle sezioni in acciaio, per le quali esistono in commercio forme e dimensioni standardizzate le cui caratteristiche geometriche sono raccolte in un sagomario. Il progetto e la verifica di sezioni attraverso un sagomario è estremamente semplice. Determinato il modulo di resistenza elastico di progetto si ricerca nella tabella la sezione che ha un modulo di resistenza uguale o superiore a quello di progetto. Individuata la sezione che corrisponde alle caratteristiche cercate, si procede alla verifica utilizzando il modulo di resistenza elastico riportato in tabella. Il procedimento risulterà più chiaro esaminando qualche esempio numerico.

La flessione retta in campo plastico



Nella figura è rappresentata una sezione con i relativi diagrammi di tensione che si verificano in diverse condizioni di comportamento. In particolare si parte da una prima fase nella quale il momento flettente che sollecita la sezione è di entità tale da far rimanere tutte le fibre del materiale in campo elastico. Il limite di questa fase coincide con il cosiddetto limite elastico nel quale ad un estremo della sezione si attinge il valore della tensione di snervamento. Nell'esempio riportato in figura è stata rappresentata una sezione a T e pertanto la tensione di snervamento viene raggiunta prima al lembo inferiore che ha una distanza maggiore dall'asse baricentrico che in fase elastica coincide con l'asse neutro. Aumentando il valore del momento flettente si entra nella fase 2 nella quale le parti estreme della sezione si plasticizzano e l'asse neutro comincia a spostarsi in conseguenza della diversa distribuzione di tensione per far sì che le condizioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione siano soddisfatte. Facendo crescere ancora il momento flettente si raggiungerà una condizione finale tutta teorica nella quale tutta la sezione è plasticizzata. In questa configurazione l'asse neutro assumerà una posizione nella quale la sezione è divisa in due parti di uguale area ed il momento che determina questa condizione rappresenta il momento ultimo della sezione.

Facendo riferimento alla fase di completa plasticizzazione della sezione sviluppiamo le equazioni di equilibrio che ci consentiranno di tradurre in relazioni algebriche il comportamento e il momento di plasticizzazione della sezione.

Come al solito immaginiamo di suddividere la sezione in tante areole piccolissime di area unitaria, su ognuna delle quali agisce la tensione di snervamento σ_s .

Le equazioni di equilibrio sono le seguenti:

$$\begin{cases} \sum a_i \cdot \sigma_s = 0 \\ \sum a_i \cdot y_i \cdot \sigma_s = M_{pl} \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta l'equilibrio alla traslazione mentre la seconda esprime l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse neutro n . Considerando che la tensione è costante e distinguendo nelle sommatorie le areole che sono al di sopra dell'asse neutro da quelle che sono al di sotto, le equazioni di equilibrio diventano:

$$\begin{cases} \sigma_s \cdot \left(\sum a_i^s - \sum a_i^i \right) = 0 \\ \sigma_s \cdot \left(\sum a_i^s \cdot y_i - \sum a_i^i \cdot y_i \right) = M_{pl} \end{cases}$$

Il segno meno nelle parentesi tiene conto del fatto che la tensione assume segno opposto nelle due zone superiore ed inferiore.

Sviluppando la prima equazione si ricava che l'asse neutro divide la sezione in due parti di area uguale, infatti:

$$\sigma_s \cdot \left(\sum a_i^s - \sum a_i^i \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_s \cdot (A^s - A^i) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^s = A^i$$

Dalla seconda equazione ricaviamo il valore del momento di plasticizzazione.

$$\sigma_s \cdot \left(\sum a_i^s \cdot y_i - \sum a_i^i \cdot y_i \right) = M_{pl} \quad \Rightarrow \quad \sigma_s \cdot (S_n^s - S_n^i) = M_{pl}$$

Il momento di plasticizzazione è dato dal prodotto della tensione di snervamento per la somma dei momenti statici rispetto all'asse neutro della parte di sezione al disopra dell'asse neutro e della parte di sezione al disotto dell'asse neutro.

Si noti che il momento statico della parte di sezione al disotto dell'asse neutro risulta negativo, e quindi i due momenti statici si sommano in valore assoluto.

La somma dei due momenti statici si definisce modulo di resistenza plastico e si indica con il simbolo W_{pl} .

$$W_{pl} = S_n^s + |S_n^i|$$

Il momento di totale plasticizzazione si può esprimere quindi nella forma: $M_{pl} = \sigma_s \cdot W_{pl}$.

Nel caso di sezioni per le quali l'asse principale x è anche asse di simmetria, l'asse neutro in fase elastica e l'asse neutro in fase plastica coincidono ed il modulo di resistenza plastico coincide con il doppio del momento statico di mezza sezione. In tale ipotesi il modulo di resistenza plastico è dato dalla seguente espressione:

$$W_{pl} = 2 \cdot S_x^s$$

Per ogni sezione può essere effettuato il rapporto tra il momento di completa plasticizzazione ed il momento al limite di elasticità, ottenendo così l'indicazione del guadagno in termini di resistenza ottenuto dallo sfruttamento della fase plastica. Tale rapporto prende il nome di **fattore di forma** e dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche della sezione, infatti:

$$M_{pl} = \sigma_s \cdot W_{pl} \quad \text{e} \quad M_{el} = \sigma_s \cdot W_{el}$$

$$\frac{M_{pl}}{M_{el}} = \frac{\sigma_s \cdot W_{pl}}{\sigma_s \cdot W_{el}} = \frac{W_{pl}}{W_{el}}$$

Il fattore di forma di una sezione è espresso attraverso il rapporto tra il modulo di resistenza plastico ed il modulo di resistenza elastico.

Per una sezione rettangolare si ottiene il seguente fattore di forma:

$$W_{pl} = 2 \cdot S_x^s = 2 \cdot \frac{B \cdot H}{2} \cdot \frac{H}{4} = \frac{B \cdot H^2}{4}$$

$$W_{el} = \frac{B \cdot H^2}{6}$$

$$\frac{W_{pl}}{W_{el}} = \frac{B \cdot H^2 / 4}{B \cdot H^2 / 6} = \frac{6}{4} = 1,5$$

Per una sezione a doppio T ad ali sottili il fattore di forma è pari invece a 1,14 – 1,15 (IPE).

Esempi applicativi

Esempio 1

Con il metodo delle tensioni ammissibili si progetta la sezione rettangolare in legno idonea a resistere al massimo momento di esercizio che si verifica nella trave rappresentata in figura.

Si tratta di una trave semplicemente appoggiata soggetta ad un carico caratteristico totale pari a 5 KN/m. Il massimo valore del momento flettente si verifica in mezzeria della trave e vale:

$$M = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{5 \cdot 5^2}{8} = 15,625 \text{ KNm} = 15,625 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Fase di progetto

Ipotizzando un comportamento perfettamente elastico del materiale ed una tensione ammissibile pari a 10MPa, il modulo di resistenza elastico minimo che la sezione deve possedere si calcola:

$$W_{xel} = \frac{M_x}{\sigma_a} = \frac{15,625 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{10 \text{ Mpa}} = 1,5625 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

Ipotizzando che per la sezione rettangolare da progettare sussista la relazione $B = \frac{5}{7} H$, l'altezza H della sezione si ottiene con la formula seguente:

$$H = \sqrt[3]{\frac{42 \cdot W_x}{5}} = \sqrt[3]{\frac{42 \cdot 1,5625 \cdot 10^6}{5}} = 100 \cdot \sqrt[3]{\frac{42 \cdot 1,5625}{5}} \cong 236 \text{ mm}$$

Adottando un valore commerciale di H=240mm si ottiene per B il seguente valore:

$$B = \frac{5}{7} H = \frac{5}{7} \cdot 240 \cong 171 \text{ mm}$$

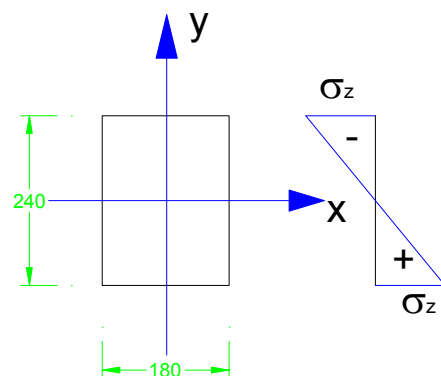
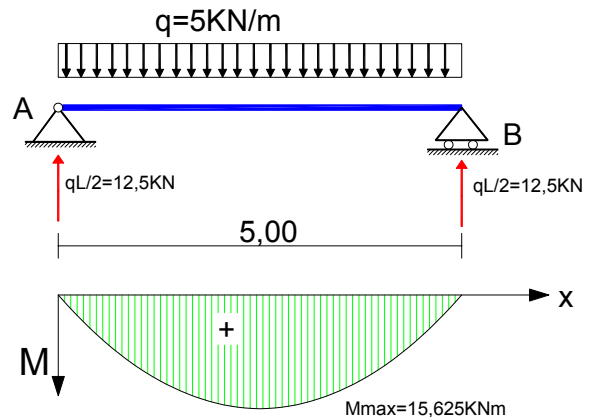
Si adotta quindi una sezione commerciale rettangolare di dimensioni 180x240 mm.

Fase di verifica

Determiniamo il modulo di resistenza elastico della sezione progettata.

$$W_{xel} = \frac{B \cdot H^2}{6} = \frac{180 \cdot 240^2}{6} = 1,728 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

Calcoliamo la tensione di lavoro e la confrontiamo con la tensione ammissibile.



$$\sigma = \frac{M_x}{W_{xel}} = \frac{15,625 \cdot 10^6}{1,728 \cdot 10^6} = 9,04 \text{ MPa} < \sigma_a \quad \text{la verifica è soddisfatta.}$$

----- §§§§§§§§§§ -----

Esempio 2

Attraverso il metodo agli stati limite prima e poi con il metodo delle tensioni ammissibili, si progetta la sezione idonea a resistere alla sollecitazione di momento flettente massima che si verifica per la trave in figura sulla quale agiscono due carichi uniformemente distribuiti di cui uno di tipo permanente con valore caratteristico pari a 4,5 KN/m, ed uno variabile pari a 3 KN/m. Si adotti una sezione di tipo IPE realizzata in acciaio Fe 360.

S.L.U.

Il carico di progetto si ottiene sommando i carichi caratteristici moltiplicati per i rispettivi coefficienti parziali di sicurezza.

$$q_d = 1,4 \cdot G + 1,5 \cdot Q = 1,4 \cdot 4,5 + 1,5 \cdot 3 = 10,8 \text{ KN/m}$$

Il massimo momento flettente di progetto si verifica nella mezzeria della trave e vale:

$$M_d = \frac{q_d \cdot l^2}{8} = \frac{10,8 \cdot 6^2}{8} = 48,6 \text{ KNm} = 48,6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Fase di progetto

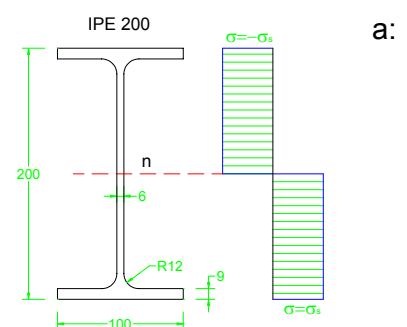
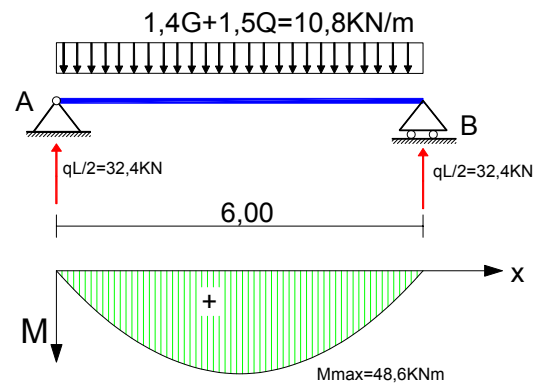
L'acciaio tipo Fe 360, presenta una tensione di snervamento caratteristica pari a $f_y = 235 \text{ MPa}$. Adottando per il coefficiente di sicurezza parziale del materiale il valore $\gamma_m = 1,05$, la tensione di snervamento di progetto è pari

$$\sigma_d = \frac{f_y}{\gamma_m} = \frac{235}{1,05} = 223,8 \text{ MPa}$$

Volendo progettare una sezione che sia in grado di resistere al momento ultimo di progetto anche facendo ricorso alla completa plasticizzazione del materiale, il modulo di resistenza plastico della sezione deve essere almeno pari a:

$$W_{pl} = \frac{M_d}{\sigma_d} = \frac{48,6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{223,8 \text{ MPa}} \cong 217,158 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 217,158 \text{ cm}^3$$

Nel Sagomario riportato alla fine di questo testo, per ogni profilo commerciale disponibile sono riportati oltre ai moduli di resistenza elastici anche i moduli di resistenza plastici. Nel caso si utilizzi un altro sagomario, solitamente non si ritrovano i moduli di resistenza plastici, ma riportano invece il valore del momento statico di mezza sezione. In tal caso, ricordando che il modulo di resistenza



plastico è pari a due volte il momento statico di mezza sezione ($W_{pl} = 2 \cdot S_x$), la sezione cercata dovrà avere:

$$S_x = \frac{W_{pl}}{2} = \frac{217,158 \text{ cm}^3}{2} \cong 106 \text{ cm}^3 = 106 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Qui si fa riferimento al sagomario allegato al testo nel quale ricerchiamo direttamente il valore del modulo di resistenza plastico $W_{pl} = 217,16 \text{ cm}^3$.

Dal sagomario si ricava che la sezione che ha un valore del modulo di resistenza plastico immediatamente superiore a quello cercato è la IPE 200, per la quale si ha: $W_{pl} = 220,64 \text{ cm}^3$

Fase di verifica

Il momento ultimo resistente della sezione, coincide con il momento di completa plasticizzazione, che si ricava nel modo che segue:

$$M_u = \sigma_d \cdot W_{pl} = 223,8 \cdot 220,64 \cdot 10^3 = 49,379 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 49,379 \text{ KNm}$$

Dal confronto del momento ultimo della sezione e del momento ultimo di progetto si ottiene:

$$\frac{M_u}{M_d} = \frac{49,379}{48,6} = 1,016 > 1 \quad ; \quad \text{la verifica è soddisfatta.}$$

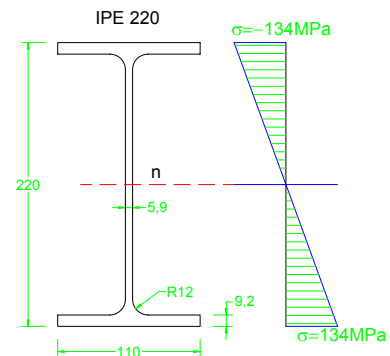
M.T.A.

Con il metodo delle tensioni ammissibili, il progetto si conduce in fase elastica considerando agenti i carichi con i loro valori caratteristici. Il carico sulla trave di progetto è pari quindi a:

$$q = G + Q = 4,5 + 3 = 7,5 \text{ KN/m}$$

Il momento massimo di esercizio sarà:

$$M = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{7,5 \cdot 6^2}{8} = 33,75 \text{ KNm}$$



Fase di progetto

La tensione ammissibile per l'acciaio tipo Fe 360 è pari a $\sigma_a = 160 \text{ MPa}$. Il modulo di resistenza elastico della sezione da progettare deve essere maggiore o uguale a:

$$W_{el} = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{33,75 \cdot 10^6}{160} \cong 211 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 211 \text{ cm}^3$$

Dal sagomario si ricava che la sezione di tipo IPE che presenta un modulo elastico W_x idoneo è la IPE 220, la quale presenta un $W_x = 252 \text{ cm}^3$, maggiori dei 211 richiesti. Con il metodo agli stati limiti abbiamo ritenuto idonea la sezione IPE 200, la quale presenta un modulo di resistenza

elastico pari a 194 cm^3 , che è leggermente inferiore al valore minimo richiesto, questo a conferma della sostanziale coerenza dei risultati progettuali a cui i due metodi conducono.

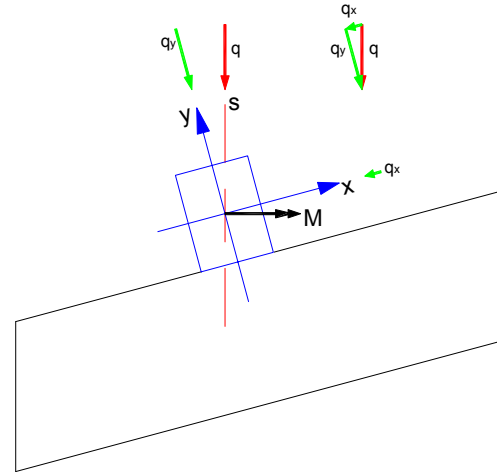
Fase di verifica

Si determina la tensione di lavoro del materiale e la si confronta con la tensione ammissibile.

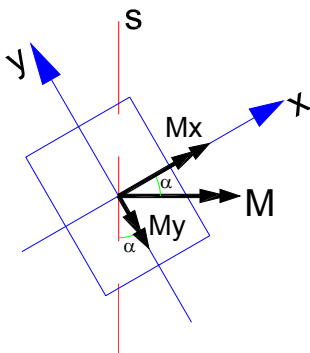
$$\sigma = \frac{M}{W_{el}} = \frac{33,75 \cdot 10^6}{252 \cdot 10^3} = 133,9 \text{ MPa} < \sigma_a \quad ; \text{ la verifica è soddisfatta.}$$

La sollecitazione di Flessione deviata

Si parla di flessione deviata quando l'asse di sollecitazione non coincide con un'asse principale della sezione. In tali circostanze si avrà contemporaneamente agente sulla sezione sia M_x che M_y . Per meglio chiarire tale possibilità, si faccia riferimento alla sezione di un arcareccio poggiante su travi inclinate rappresentata in figura. I carichi agenti sull'arcareccio, in quanto generalmente forze peso, agiranno lungo la direzione verticale (asse di sollecitazione) che non coincide con l'asse principale y della sezione. In tale condizione il momento flettente derivante dalla sollecitazione lungo l'asse s , potrà scomporsi nelle due componenti M_x e M_y relative alle direzioni principali della sezione x e y . I momenti flettenti M_x e M_y , saranno gli stessi che si ottengono se si scompone il carico nelle due direzioni x e y e poi si conduce separatamente la determinazione delle caratteristiche della sollecitazione e quindi della flessione nei piani xz e yz .



Se rappresentiamo i momenti con vettori a doppia freccia, il momento relativo all'asse di sollecitazione della sezione s , agirà nel baricentro lungo la direzione perpendicolare a s , e formerà l'angolo α con l'asse principale x . I momenti flettenti M_x e M_y saranno pari a:



$$M_x = M \cdot \cos \alpha$$

$$M_y = M \cdot \sin \alpha$$

L'angolo α andrà considerato positivo se antiorario. La determinazione del campo tensionale nella sezione potrà condursi sommando gli effetti delle due componenti del momento flettente rispetto agli assi principali d'inerzia. Il momento M_x ci determinerà la tensione

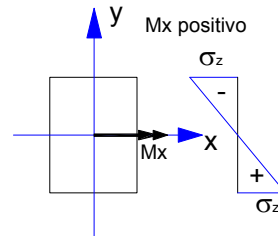
$$\sigma_1 = -\frac{M_x}{J_x} \cdot y$$

mentre per il momento M_y si avrà

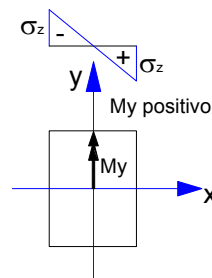
$$\sigma_2 = +\frac{M_y}{J_y} \cdot x$$

Il campo tensionale sarà dato dalla somma $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ e quindi :

Note:
Rappresentando i momenti attraverso vettori disegnati con doppia freccia, il verso del momento va inteso nel modo che segue:
Un osservatore posto nel punto di applicazione del vettore, guardando la punta osserva una rotazione antioraria prodotta dal momento.



Il Momento M_x positivo produce tensioni positive di trazione nella zona in cui le y è negativa



Il Momento M_y positivo produce tensioni positive di trazione nella zona in cui le x sono positive

$$\sigma = -\frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x$$

Tenendo conto delle espressioni che legano le componenti del Momento M_x e M_y al Momento M ed all'angolo α che l'asse di sollecitazione forma con l'asse delle y , il campo tensionale può esprimersi nella forma che segue.

$$\sigma = -\frac{M \cdot \cos \alpha}{J_x} \cdot y + \frac{M \cdot \sin \alpha}{J_y} \cdot x = M \cdot \left(-\frac{y \cdot \cos \alpha}{J_x} + \frac{x \cdot \sin \alpha}{J_y} \right)$$

Se utilizziamo le espressioni dei moduli di resistenza elastici comprensivi dei segni algebrici, le tensioni possono ricavarsi anche con l'espressione che segue:

$$\sigma = -\frac{M \cdot \cos \alpha}{W_x} + \frac{M \cdot \sin \alpha}{W_y} = M \cdot \left(-\frac{\cos \alpha}{W_x} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right)$$

Per ottenere l'equazione dell'asse neutro, basta porre uguale a zero l'espressione della tensione σ

$$\begin{aligned} \sigma &= M \cdot \left(-\frac{y \cdot \cos \alpha}{J_x} + \frac{x \cdot \sin \alpha}{J_y} \right) = 0 \\ -\frac{y \cdot \cos \alpha}{J_x} + \frac{x \cdot \sin \alpha}{J_y} &= 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{J_x \cdot \sin \alpha}{J_y \cdot \cos \alpha} \cdot x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot x \end{aligned}$$

L'equazione ottenuta rappresenta una retta (l'asse neutro) passante per l'origine degli assi (il baricentro della sezione) con coefficiente angolare

$m = \frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha$. L'angolo di inclinazione β che

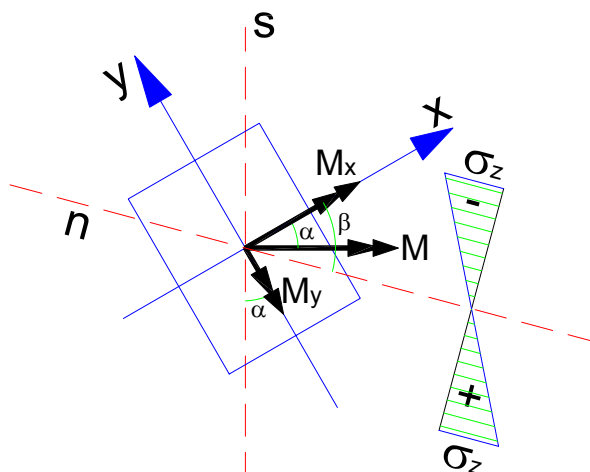
l'asse neutro forma con l'asse delle x si ottiene ricordando che il coefficiente angolare di una retta è la tangente trigonometrica dell'angolo che questa forma proprio con l'asse delle x .

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right)$$

L'angolo β starà dallo stesso lato di α e risulterà maggiore di α se J_x è maggiore di J_y .

Ricordando che $J_x = A \cdot i_x^2$ e che $J_y = A \cdot i_y^2$, l'angolo β può anche ricavarsi con l'espressione che segue:

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{i_x^2}{i_y^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right)$$



Progetto di sezioni soggette a flessione deviata (M.T.A.).

Poiché nelle formule di verifica intervengono contemporaneamente le caratteristiche di inerzia e di resistenza di entrambe le direzioni principali, spesso occorre procedere nel progetto per successivi tentativi alla ricerca della sezione ottimale.

Si può però ricavare una formula di progetto per quei casi in cui è possibile fissare a priori il rapporto tra i moduli di resistenza della sezione.

$$\text{Posto } K = \frac{W_x}{W_y}$$

la relazione che ci fornisce il massimo valore della tensione può scriversi nel modo che segue:

$$\sigma = \left| \frac{M_x}{W_x} \right| + \left| \frac{M_y}{W_y} \right| = \left| \frac{M \cdot \cos \alpha}{W_x} \right| + \left| \frac{M \cdot \sin \alpha}{W_x / K} \right| = \left| \frac{M}{W_x} \right| \cdot (\cos \alpha + K \cdot \sin \alpha)$$

e quindi come formula di progetto si ottiene:

$$W_x = \frac{M}{\sigma_a} \cdot (\cos \alpha + K \cdot \sin \alpha) \quad \text{o anche} \quad W_x = \frac{1}{\sigma_a} \cdot (M_x + K \cdot M_y)$$

Il metodo può applicarsi alle sezioni in legno per le quali solitamente si fissa un certo rapporto tra la base **B** e l'altezza **H** della sezione $B = \frac{5}{7}H$ che comporta un rapporto fisso tra i moduli di resistenza della sezione e quindi un valore della costante di proporzionalità $K=1,4$.

Per le sezioni in acciaio di tipo IPE si osserva una notevole variabilità del valore di K che varia tra 5,5 circa per un IPE 80 fino a circa 10 per un IPE 600. Limitando però il campo tra IPE 80 e IPE 240 che con maggiore probabilità si avrà modo di incontrare nei progetti di sezioni soggette a flessione deviata, potrà con una certa approssimazione adottarsi un valore di $K=6,5$ per poi eventualmente procedere con una successiva iterazione ad ottimizzare la sezione di progetto.

Minore variabilità del coefficiente K si riscontra nelle sezione tipo HE con dimensioni inferiore al 300. Per queste sezioni potrà adottarsi con sufficiente approssimazione $K=3$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{5}{7} \cdot H \\ W_x &= \frac{B \cdot H^2}{6} = \frac{5}{42} \cdot H^3 \\ W_y &= \frac{H \cdot B^2}{6} = \frac{H}{6} \cdot \left(\frac{5 \cdot H}{7} \right)^2 = \frac{25}{294} \cdot H^3 \\ K &= \frac{W_x}{W_y} = \frac{\frac{5}{42} \cdot H^3}{\frac{25}{294} \cdot H^3} = \frac{5}{42} \cdot \frac{294}{25} = \frac{7}{5} = 1,4 \end{aligned}$$

Facciamo un esempio numerico.

Si progetti una sezione rettangolare in legno caricata nel piano verticale. La sezione è inclinata di 15° ed è soggetta ad un momento flettente $M=13\text{KNm}$.

Trattandosi di sezione in legno massiccio, il coefficiente si assegna $K=1,4$, e si determina il modulo di resistenza elastico W_x della sezione con il procedimento prima illustrato.

$$W_x = \frac{M}{\sigma_a} \cdot (\cos \alpha + K \cdot \sin \alpha)$$

Adottando un legno di II Categoria può porsi $\sigma_a = 10\text{MPa}$, quindi :

$$W_x = \frac{11 \cdot 10^6}{10} \cdot (\cos 15 + 1,4 \cdot \sin 15) = 1727 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Le dimensioni geometriche della sezione si ricavano quindi con le seguenti espressioni:

$$H = \sqrt[3]{\frac{42 \cdot W_x}{5}} = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{42 \cdot 1727}{5}} = 244\text{mm} \Rightarrow 260\text{mm}$$

$$B = \frac{5}{7} \cdot H = \frac{5}{7} \cdot 260 = 186\text{mm} \Rightarrow 200\text{mm}$$

Si adotta una sezione rettangolare di dimensioni 200 x 260.

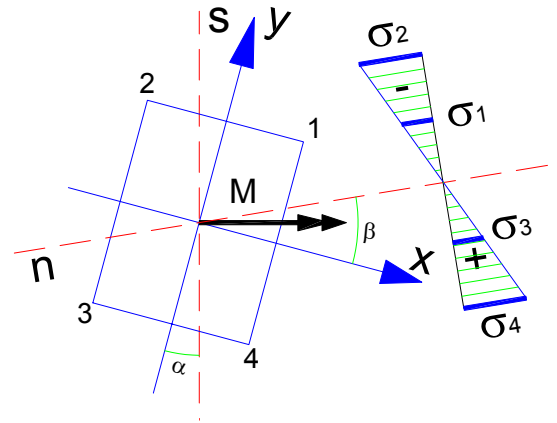
I momenti d'inerzia principali e i moduli di resistenza elastici sono i seguenti:

$$J_x = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{200 \cdot 260^3}{12} = 292,93 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_y = \frac{H \cdot B^3}{12} = \frac{260 \cdot 200^3}{12} = 173,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$W_x = \frac{J_x}{H/2} = \frac{292,93 \cdot 10^6}{130} = 2,253 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$W_y = \frac{J_y}{B/2} = \frac{173,3 \cdot 10^6}{100} = 1,733 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$



La massima tensione che si raggiunge nella sezione è:

$$\sigma = M \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{W_x} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) = \frac{13 \cdot 10^6}{10^6} \cdot \left(\frac{\cos 15}{2,253} + \frac{\sin 15}{1,733} \right) = 7,51\text{MPa}$$

La verifica risulta soddisfatta essendo la massima tensione minore della tensione ammissibile. Per determinare l'inclinazione dell'asse neutro e le tensioni nei vertici della sezione si procede come segue:

$$\beta = \arctg \left(\frac{J_x}{J_y} \cdot \tg \alpha \right) = \arctg \left(\frac{292,93 \cdot 10^6}{173,3 \cdot 10^6} \cdot \tg 15 \right) = 24,36^\circ$$

L'espressione che ci fornisce il campo tensionale è la seguente:

$$\sigma = -\frac{M \cdot \cos \alpha}{J_x} \cdot y + \frac{M \cdot \sin \alpha}{J_y} \cdot x = M \cdot \left(-\frac{\cos \alpha}{J_x} \cdot y + \frac{\sin \alpha}{J_y} \cdot x \right)$$

Inserendo i valori delle coordinate x e y dei quattro vertici si ottengono le tensioni cercate.

$$\sigma_1 = \frac{13 \cdot 10^6}{10^6} \cdot \left(-\frac{\cos 15}{292,93} \cdot 130 + \frac{\sin 15}{173,3} \cdot 100 \right) = -3,63\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{13 \cdot 10^6}{10^6} \cdot \left(-\frac{\cos 15}{292,93} \cdot 130 + \frac{\sin 15}{173,3} \cdot (-100) \right) = -7,51 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{13 \cdot 10^6}{10^6} \cdot \left(-\frac{\cos 15}{292,93} \cdot (-130) + \frac{\sin 15}{173,3} \cdot (-100) \right) = 3,63 \text{ MPa}$$

$$\sigma_4 = \frac{13 \cdot 10^6}{10^6} \cdot \left(-\frac{\cos 15}{292,93} \cdot (-130) + \frac{\sin 15}{173,3} \cdot 100 \right) = 7,51 \text{ MPa}$$

Il campo delle tensioni raggiunge il massimo ed il minimo valore rispettivamente nei vertici **4** e **2**. Nella figura è rappresentato il diagramma delle tensioni.

Con gli stessi dati di progetto, proviamo a progettare una sezione a doppio T in acciaio tipo Fe 360 con tensione ammissibile $\sigma_a = 160 \text{ MPa}$.

Se pensiamo di adottare una sezione di tipo IPE possiamo adottare in prima approssimazione un valore di $K=6,5$

Il modulo di resistenza elastico W_x della sezione dovrà avere il seguente valore da considerarsi minimo.

$$W_x = \frac{M}{\sigma_a} \cdot (\cos \alpha + K \cdot \sin \alpha) = \frac{13 \cdot 10^6}{160} \cdot (\cos 15 + 6,5 \cdot \sin 15) = 215 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 215 \text{ cm}^3$$

Dal sagomario ricaviamo che la prima sezione che presenta il modulo di resistenza elastico maggiore di quello richiesto è la IPE 220, la quale ha una altezza di 220 mm, una massa di 26,2 Kg/m ed i seguenti momenti d'inerzia principali e moduli di resistenza elastici:

$$\begin{aligned} J_x &= 2772 \text{ cm}^4 & J_y &= 205 \text{ cm}^4 \\ W_x &= 252 \text{ cm}^3 = 252 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 & W_y &= 37,5 \text{ cm}^3 = 37,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

La massima tensione di lavoro nella sezione è pari a:

$$\sigma = M \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{W_x} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) = \frac{13 \cdot 10^6}{10^3} \cdot \left(\frac{\cos 15}{252} + \frac{\sin 15}{37,5} \right) \cong 140 \text{ MPa} < \sigma_a$$

L'angolo che l'asse neutro forma con l'asse delle x è:

$$\beta = \arctg \left(\frac{J_x}{J_y} \cdot \tg \alpha \right) = \arctg \left(\frac{2772}{205} \cdot \tg \alpha \right) = 74,57^\circ$$

Se invece di una sezione tipo IPE adottiamo una sezione di tipo HE si deve assumere $K=3$.

$$W_x = \frac{M}{\sigma_a} \cdot (\cos \alpha + K \cdot \sin \alpha) = \frac{13 \cdot 10^6}{160} \cdot (\cos 15 + 3 \cdot \sin 15) = 142 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 142 \text{ cm}^3$$

Dal sagomario facendo riferimento alle sezioni di tipo HE B si ricava la sezione HE 120 B, la quale ha un'altezza pari a 120 mm, una massa pari 26,7 Kg/m ed i seguenti momenti di inerzia principali e moduli di resistenza elastici.

$$\begin{aligned} J_x &= 864 \text{ cm}^4 & J_y &= 318 \text{ cm}^4 \\ W_x &= 144 \text{ cm}^3 = 144 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 & W_y &= 53 \text{ cm}^3 = 53 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

La verifica ci fornisce il seguente valore della tensione massima:

$$\sigma = M \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{W_x} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) = \frac{13 \cdot 10^6}{10^3} \cdot \left(\frac{\cos 15}{144} + \frac{\sin 15}{53} \right) \cong 150 \text{ MPa} < \sigma_a$$

L'angolo che l'asse neutro forma con l'asse delle x è:

$$\beta = \arctg \left(\frac{J_x}{J_y} \cdot \tg \alpha \right) = \arctg \left(\frac{864}{318} \cdot \tg 15 \right) = 36,05^\circ$$

Da questi semplici esempi numerici si comprende l'influenza del coefficiente K nella capacità di resistenza di una sezione alla sollecitazione di flessione deviata. In particolare si rileva che più è basso il valore di K maggiore sarà l'efficienza della sezione della sezione nelle applicazioni in cui la sollecitazione è di flessione deviata.

In particolare per le sezioni in acciaio si è visto che a parità di massa, le sezioni di tipo HE rispetto alle sezioni di tipo IPE, richiedono altezze del profilo inferiori.

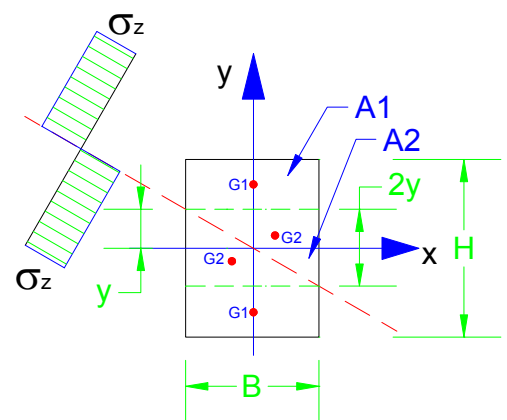
La flessione deviata in campo plastico

Affrontare il problema della flessione deviata in campo plastico presenta una certa complessità e pertanto ci limiteremo ad affrontare solo qualche caso specifico. La contemporanea presenza di entrambi i momenti flettenti, comporta che la resistenza plastica della sezione debba in qualche modo ripartirsi tra le due direzioni di flessione. Come si vedrà tale ripartizione varia al variare della posizione dell'asse neutro, e quindi per poterla conoscere si deve procedere alla costruzione del dominio di resistenza della sezione. Costruire un dominio di resistenza, significa determinare nel piano cartesiano di coordinate M_x e M_y , i punti corrispondenti ai valori limite delle sollecitazioni flettenti. In pratica al variare per esempio di M_x si determina il momento M_y corrispondente che determina la completa plasticizzazione della sezione.

Per comprendere meglio il procedimento facciamo l'esempio di una sezione rettangolare.

Per costruire un dominio di resistenza svincolato dalle caratteristiche del materiale si considererà una tensione di snervamento $\sigma_s=1$. Con riferimento alla sezione rappresentata, si procede nel modo che segue. Fissata una posizione con inclinazione generica dell'asse neutro tale che $0 \leq y \leq H/2$ si considera la

sezione composta dal rettangolo di Area A_1 e baricentro G_1 e dal triangolo di Area A_2 e baricentro G_2 . Dal lato opposto dell'asse neutro si avranno identicamente le due stesse aree con la posizione dei baricentri. Poiché in regime plastico ai lati opposti le singole aree sono sollecitate da tensioni costanti e di segno opposto, le rispettive risultanti



applicate nei baricentri costituiscono delle coppie attraverso le quali possiamo calcolare i Momenti M_x e M_y . Nel dettaglio le relazioni che ci forniscono i valori dei momenti cercati sono le seguenti:

$$A_1 = B \cdot \left(\frac{H}{2} - y \right) \quad Y_{G1} = \left(\frac{H}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} + y = \frac{H}{4} + \frac{y}{2} \quad X_{G1} = 0$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot B \cdot 2 \cdot y = B \cdot y \quad Y_{G2} = y - \frac{2y}{3} = \frac{1}{3} \cdot y \quad X_{G2} = \frac{B}{2} - \frac{B}{3} = \frac{B}{6}$$

$$M_x = \sigma_s \cdot (A_1 \cdot 2 \cdot Y_{G1} + A_2 \cdot 2 \cdot Y_{G2})$$

$$M_y = \sigma_s \cdot (A_2 \cdot 2 \cdot X_{G2})$$

Con le formule precedenti, facendo variare il valore di y tra 0 ed $H/2$ con un certo numero di intervalli, si ottengono le coppie di valori M_x e M_y entro il campo di di variazione delle y analizzato. Per completare le posizioni possibili dell'asse neutro dal coincidere con l'asse x fino alla coincidenza con l'asse y , in aggiunta allo schema precedente si deve fare riferimento ad un secondo schema.

Riferendoci alla figura a lato, la x deve essere fatta variare tra il valore $B/2$ e 0 . Le formule da adottare sono le seguenti:

$$A_1 = H \cdot \left(\frac{B}{2} - x \right)$$

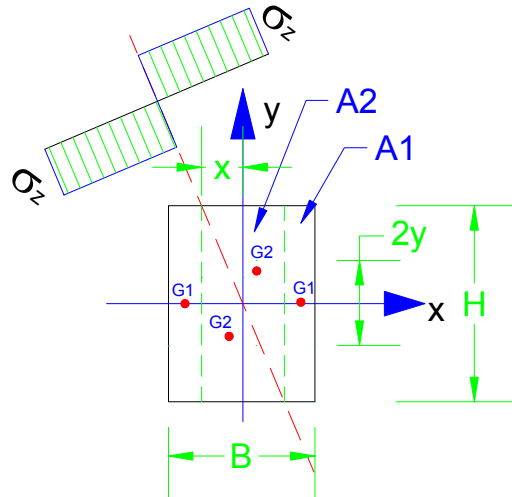
$$X_{G1} = x + \left(\frac{B}{2} - x \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{B}{4} \quad Y_{G1} = 0$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot H \cdot 2 \cdot x = H \cdot x$$

$$X_{G2} = x - \frac{1}{3} \cdot 2x = \frac{1}{3}x \quad Y_{G2} = \frac{H}{2} - \frac{H}{3} = \frac{H}{6}$$

$$M_x = \sigma_s \cdot (A_2 \cdot 2 \cdot Y_{G2})$$

$$M_y = \sigma_s \cdot (A_1 \cdot 2 \cdot X_{G1} + A_2 \cdot 2 \cdot X_{G2})$$



Anche per questo secondo schema vanno calcolati una serie di valori dei momenti facendo variare opportunamente la variabile x .

Oltre al valore dei momenti, per ogni posizione dell'asse neutro può essere determinato anche l'angolo β che questo forma con l'asse delle x e attraverso la composizione dei momenti nelle direzioni x e y l'angolo α che forma l'asse di sollecitazione con l'asse y . Per svincolare i risultati numerici dalle dimensioni specifiche della sezione, si possono quindi determinare i rapporti tra i momenti flettenti calcolati e i momenti flettenti ultimi a flessione retta in direzione x e y ed inoltre la somma di detti rapporti.

Vengono di seguito riportati i risultati numerici ottenuti per una sezione rettangolare di dimensioni 180×240 .

Dominio di resistenza a flessione deviata per una sezione rettangolare

B= 180 mm
 H= 240 mm
 $\sigma_s=1$
 $M_{ux}= 2592000$
 $M_{uy}= 1944000$

0=<y<=H/2

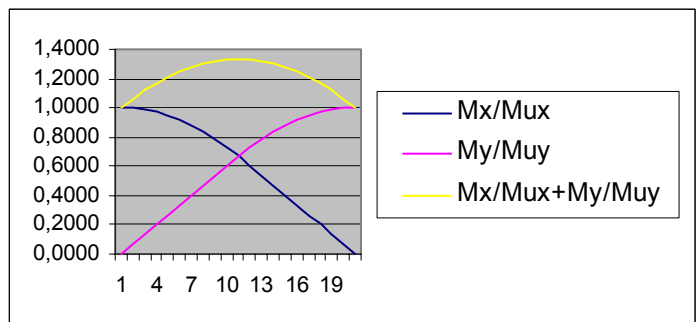
Punti	Y=	Mx	My	Mu dev	α	β	Mx/Mux	My/Muy	Mx/Mux+My/Muy
0	0	2592000	0	2592000	0	0	1,0000	0,0000	1,000
1	12	2583360	129600	2586609	2,87196249	7,594643	0,9967	0,0667	1,063
2	24	2557440	259200	2570542	5,78724296	14,93142	0,9867	0,1333	1,120
3	36	2514240	388800	2544124	8,79054318	21,80141	0,9700	0,2000	1,170
4	48	2453760	518400	2507923	11,9293222	28,07249	0,9467	0,2667	1,213
5	60	2376000	648000	2462779	15,2551187	33,69007	0,9167	0,3333	1,250
6	72	2280960	777600	2409863	18,82471	38,65981	0,8800	0,4000	1,280
7	84	2168640	907200	2350747	22,7008598	43,02507	0,8367	0,4667	1,303
8	96	2039040	1036800	2287496	26,9521789	46,84761	0,7867	0,5333	1,320
9	108	1892160	1166400	2222782	31,6512729	50,19443	0,7300	0,6000	1,330
10	120	1728000	1296000	2160000	36,8698976	53,1301	0,6667	0,6667	1,333

0=<x<=B/2

Punti	x=	Mx	My	Mu dev	α	β	Mx/Mux	My/Muy	Mx/Mux+My/muy
11	81	1555200	1419120	2105362	42,3804512	55,98065	0,6000	0,7300	1,330
12	72	1382400	1529280	2061487	47,8878436	59,03624	0,5333	0,7867	1,320
13	63	1209600	1626480	2026961	53,3621172	62,30053	0,4667	0,8367	1,303
14	54	1036800	1710720	2000379	58,7815972	65,77225	0,4000	0,8800	1,280
15	45	864000	1782000	1980409	64,1336432	69,44395	0,3333	0,9167	1,250
16	36	691200	1840320	1965842	69,4144816	73,30076	0,2667	0,9467	1,213
17	27	518400	1885680	1955640	74,6283251	77,31962	0,2000	0,9700	1,170
18	18	345600	1918080	1948966	79,786027	81,46923	0,1333	0,9867	1,120
19	9	172800	1937520	1945210	84,9034928	85,71085	0,0667	0,9967	1,063
20	0	0	1944000	1944000	90	90	0,0000	1,0000	1,000

Dai risultati ottenuti si evidenzia la variabilità della ripartizione della resistenza della sezione tra **M_x** e **M_y** a secondo della inclinazione dell'asse neutro.

Si osserva che la somma dei fattori di sfruttamento della sezione risulta compresa tra il valore 1 e 1,33 che si raggiunge quando l'asse neutro coincide con la diagonale del rettangolo.

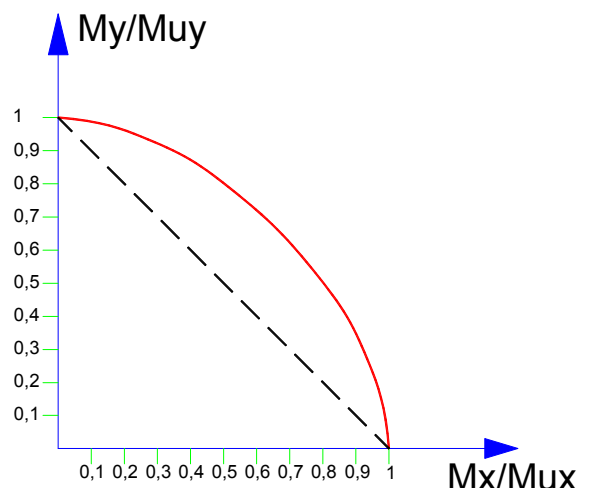


$$1 \leq \frac{M_x}{M_{ux}} + \frac{M_y}{M_{uy}} \leq 1,333$$

Riportando in un riferimento cartesiano le coppie di valori **M_x** e **M_y**, si costruisce il dominio di resistenza della sezione analizzata.

Per ottenere invece un dominio di resistenza adimensionalizzato caratteristico del tipo di sezione analizzata, vanno rappresentate invece delle coppie di momenti le coppie dei rapporti dei momenti rispetto ai momenti ultimi a flessione retta. Nella figura a fianco è appunto rappresentato il dominio adimensionalizzato per la sezione rettangolare.

Un dominio di resistenza rappresenta la curva dei valori limiti di resistenza, considerando quindi una determinata condizione di sollecitazione della



sezione, caratterizzata da un punto nel piano sul quale è riportato il dominio, se il punto risulta interno al dominio, la sezione è in grado di resistere a tale sollecitazione, se invece il punto cade all'esterno del dominio di resistenza la sezione non è in grado di resistere alla sollecitazione assegnata.

Nel diagramma è stata rappresentata in rosso la curva limite del dominio calcolato, mentre in nero è stata rappresentata la retta di equazione:

$$\frac{M_x}{M_{ux}} + \frac{M_y}{M_{uy}} = 1$$

Tale retta potrebbe rappresentare un dominio di resistenza cautelativo a vantaggio di statica, ma di utilizzo estremamente semplificato. Utilizzando tale dominio semplificato, la verifica a flessione deviata può essere condotta senza la necessità di costruire e rappresentare graficamente il dominio di resistenza della sezione, ma accertando semplicemente che i momenti che sollecitano la sezione rispettino la seguente relazione:

$$\frac{M_x}{M_{ux}} + \frac{M_y}{M_{uy}} \leq 1$$

La relazione appena proposta è proprio quella che prescrivono alcune normative tecniche per le strutture in acciaio, per le quali, dato le forme dei profili utilizzati, risulta meno penalizzante rispetto a quanto accade per la sezione rettangolare.

In effetti per le sezioni comunemente utilizzate per le travi in acciaio (sezioni a doppio T, con spessori di anima e di ali piuttosto sottili) si registra un valore maggiore di 1 solo quando l'asse neutro taglia le ali raggiungendo valori massimi dell'ordine di 1,25.

Nel caso si analizzi una sezione i cui assi principali d'inerzia non sono anche assi di simmetria, si ricorda che l'asse neutro in fase plastica divide la sezione in due aree uguali, e quindi tale condizione (equilibrio alla traslazione) deve essere portata in conto per determinare la posizione dell'asse neutro e quindi il dominio di resistenza.

Progetto delle sezioni soggette a flessione deviata (S.L.U.)

In analogia al procedimento di progetto indicato per il metodo delle tensioni ammissibili, si può procedere al progetto allo S.L.U. nel modo che segue:

Facendo riferimento al dominio di resistenza semplificato di una sezione soggetta a flessione deviata, la verifica allo S.L.U. risulta soddisfatta se è verificata la relazione che segue.

$$\frac{M_{dx}}{M_{ux}} + \frac{M_{dy}}{M_{uy}} \leq 1$$

dove al numeratore compaiono i momenti flettenti di progetto secondo le componenti **x** e **y** e al denominatore i momenti resistenti ultimi a flessione semplice in entrambe le direzioni.

Ricordando che:

$$M_{ux} = \sigma_d \cdot W_{plx} \quad ; \quad M_{uy} = \sigma_d \cdot W_{ply}$$

se può porsi $W_{plx} = K \cdot W_{ply}$ dal dominio di resistenza può ricavarsi la formula di progetto cercata:

$$\frac{M_{dx}}{M_{uy}} + \frac{M_{dy}}{M_{uy}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{dx}}{\sigma_d \cdot W_{plx}} + \frac{M_{dy}}{\sigma_d \cdot W_{ply}} \leq 1$$

$$\frac{M_{dx}}{\sigma_d \cdot W_{plx}} + \frac{K \cdot M_{dy}}{\sigma_d \cdot W_{plx}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{dx} + K \cdot M_{dy}}{\sigma_d \cdot W_{plx}} \leq 1$$

$$W_{plx} \geq \frac{M_{dx} + K \cdot M_{dy}}{\sigma_d}$$

Per quanto attiene al valore da assegnare al parametro K, dal sagomario delle sezioni in acciaio si deduce per le sezioni tipo IPE tra le altezze di sezione 80 e 300, un valore di K tra 4,50 e 5. Per il dimensionamento di sezioni di tipo IPE rientranti in tale intervallo appare quindi ragionevole attribuire in prima approssimazione il valore K=5. Per sezioni tipo HE, la variabilità del parametro è ancora più ridotta passando dal valore 2 per un HE B 100 al valore 2,14 per un HE B 300. Appare quindi ragionevole assegnare K=2,14 per il progetto di sezioni tipo HE la cui altezza risulti inferiore a 300 mm. Per sezioni IPE e HE al di fuori dell'intervallo considerato andranno adottati valori di K più elevati coerentemente con le sezioni attese dai valori di progetto delle sollecitazioni.

Facciamo un esempio numerico.

Si vuole progettare una sezione in profilato d'acciaio capace di resistere ad un Momento flettente di progetto allo S.L.U. valutato secondo l'asse di sollecitazione che forma un angolo $\alpha=14^\circ$ e pari a 20,52 KNm.

Come prima operazione ci scomponiamo il momento flettente secondo le direzioni principali della sezione.

$$M_{dx} = M_d \cdot \cos \alpha = 20,52 \cdot \cos 14 = 19,910 \text{ KNm}$$

$$M_{dy} = M_d \cdot \sin \alpha = 20,52 \cdot \sin 14 = 4,961 \text{ KNm}$$

Utilizzando un acciaio tipo Fe 360 la cui tensione di snervamento f_{yk} è pari a 235 MPa e adottando un coefficiente di sicurezza del materiale γ_m pari a 1,05, la tensione limite di progetto si assume pari a:

$$\sigma_d = \frac{f_{yk}}{\gamma_m} = \frac{235}{1,05} = 223,8 \text{ MPa}$$

Per progettare una sezione di tipo IPE, assumiamo K=5 e determiniamo il valore minimo del modulo di resistenza plastico in direzione x che la sezione deve possedere.

$$W_{plx} = \frac{M_{dx} + K \cdot M_{dy}}{\sigma_d} = \frac{(19,910 + 5 \cdot 4,961) \cdot 10^6}{223,8} = 196 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 196 \text{ cm}^3$$

Dal sagomario si ricava che la prima sezione utile con valore di W_{plx} maggiore di quello minimo richiesto dal progetto è la IPE 200. Per tale sezione, sempre dal sagomario, si ricavano i seguenti moduli di resistenza plastici:

$$IPE \quad 200 \quad \begin{aligned} W_{plx} &= 220,6 \text{ cm}^3 \\ W_{ply} &= 44,61 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Per effettuare la verifica determiniamo i momenti resistenti ultimi a flessione semplice e poi confrontiamo le sollecitazioni di progetto con il dominio di resistenza.

$$M_{ux} = \sigma_d \cdot W_{plx} = 223,8 \cdot 220,6 \cdot 10^3 = 49,37 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 49,37 \text{ KNm}$$

$$M_{uy} = \sigma_d \cdot W_{ply} = 223,8 \cdot 44,61 \cdot 10^3 = 9,98 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 9,98 \text{ KNm}$$

$$\frac{M_{dx}}{M_{ux}} + \frac{M_{dy}}{M_{uy}} = \frac{19,910}{49,37} + \frac{4,961}{9,98} = 0,90 < 1$$

la verifica è soddisfatta.

Se invece di un profilo tipo IPE voglio adottare un profilo tipo HE, la costante K deve assumere il valore 2,10 che comporta il seguente modulo di resistenza plastico di progetto.

$$W_{plx} = \frac{M_{dx} + K \cdot M_{dy}}{\sigma_d} = \frac{(19,910 + 2,10 \cdot 4,961) \cdot 10^6}{223,8} = 136 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 136 \text{ cm}^3$$

Dal sagomario ricavo la sezione di progetto con le relative caratteristiche meccaniche.

$$HEB \quad 120 \quad \begin{aligned} W_{plx} &= 165,2 \text{ cm}^3 \\ W_{ply} &= 80,97 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

I momenti resistenti ultimi della sezione e il confronto delle sollecitazioni di progetto con il dominio di resistenza determinano la verifica della sezione di progetto.

$$M_{ux} = \sigma_d \cdot W_{plx} = 223,8 \cdot 165,2 \cdot 10^3 = 36,97 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 36,97 \text{ KNm}$$

$$M_{uy} = \sigma_d \cdot W_{ply} = 223,8 \cdot 80,97 \cdot 10^3 = 18,12 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 18,12 \text{ KNm}$$

$$\frac{M_{dx}}{M_{ux}} + \frac{M_{dy}}{M_{uy}} = \frac{19,910}{36,97} + \frac{4,961}{18,12} = 0,81 < 1$$

la verifica è soddisfatta.

Esempi applicativi

Si vuole progettare una trave di copertura in acciaio poggiante su capriate principali distanti tra loro di m 5 ed aventi la linea di colmo che determina una pendenza trasversale del 30%. Sulla trave oggetto del calcolo agiscono secondo un asse di sollecitazione verticale, un carico permanente uniformemente distribuito pari a 1,875 KN/m ed un carico variabile pari a 3,75 KN/m.

Il progetto sarà condotto dapprima secondo il M.T.A. e poi secondo il metodo agli S.L.U. così da poter confrontare i risultati ottenuti.

M.T.A.

Determinazione delle sollecitazioni di progetto

Lo schema strutturale è quello di una trave semplicemente appoggiata di luce pari a m 5 sul quale agisce un carico uniformemente distribuito pari a:

$$q = G + Q = 1,875 + 3,75 = 5,625 \text{ KN/m}$$

Il momento massimo si verifica nella sezione di mezzaria ed è pari a:

$$M_{\max} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{5,625 \cdot 5^2}{8} = 17,578 \text{ KNm}$$

La trave è appoggiata sul colmo delle capriate che presenta una pendenza del 30% che corrisponde ad un angolo:

$$\alpha = \arctg(0,30) = 16,7^\circ$$

L'asse di sollecitazione della trave formerà con gli assi principali della sezione un angolo $\alpha = -16,7^\circ$ trattandosi di una rotazione oraria dell'asse di sollecitazione s rispetto all'asse principale y . Scomponendo il Momento massimo agente sulla trave si ottengono i valori dei momenti flettenti secondo gli assi x e y .

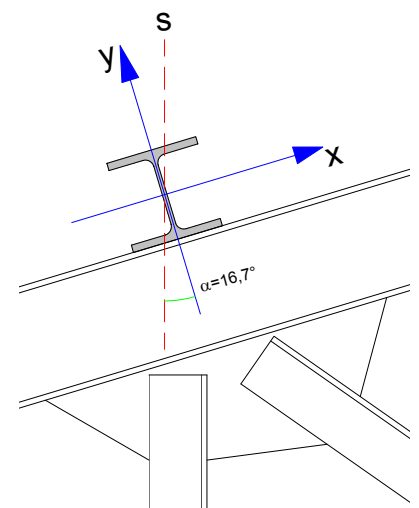
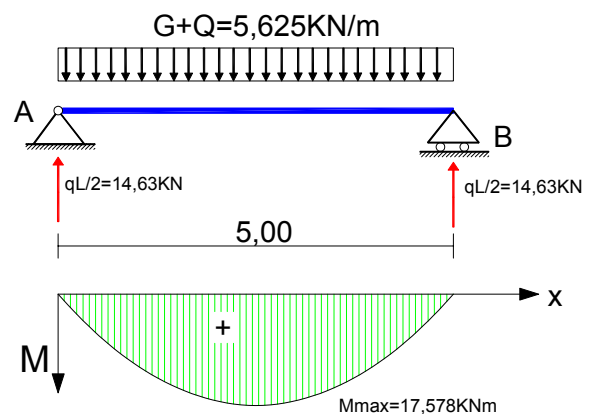
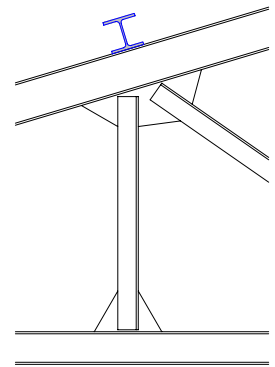
$$M_x = M_{\max} \cdot \cos \alpha = 17,578 \cdot \cos(-16,7) = 16,837 \text{ KNm}$$

$$M_y = M_{\max} \cdot \sin \alpha = 17,578 \cdot \sin(-16,7) = -5,051 \text{ KNm}$$

Fase di progetto

Volendo adottare una sezione tipo HE B, il fattore di proporzionalità K tra i moduli di resistenza elastica della sezione può essere assunto pari 3, inoltre adottando un acciaio tipo Fe 360 si assume il seguente valore della tensione ammissibile $\sigma_a = 160 \text{ MPa}$. Nel progetto non si terrà conto dell'effettivo segno algebrico dei momenti in quanto il materiale presenta la medesima resistenza sia a trazione che a compressione, e pertanto possiamo operare con i valori assoluti della tensione di lavoro.

Il modulo di resistenza elastico minimo richiesto dalle sollecitazioni di progetto è:



$$W_x = \frac{M_x + K \cdot M_y}{\sigma_a} = \frac{(16,837 + 3 \cdot 5,051) \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{160 \text{ Mpa}} = 199,938 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 199,938 \text{ cm}^3$$

Dal sagomario si ricava una sezione HE 140 B la quale dispone dei seguenti moduli di resistenza elastica: $W_x = 215,6 \text{ cm}^3$; $W_y = 78,52 \text{ cm}^3$

Fase di verifica

La verifica della sezione viene condotta calcolando la tensione di lavoro massima e confrontandola con la tensione ammissibile.

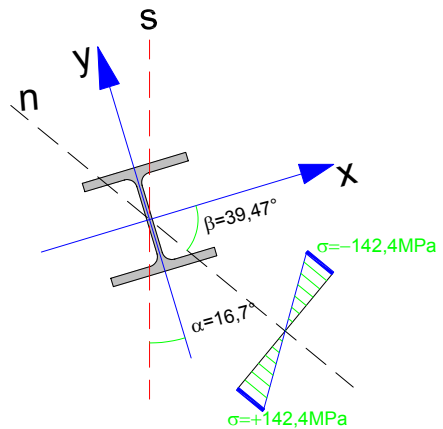
$$\sigma = \left| \frac{M_x}{W_x} \right| + \left| \frac{M_y}{W_y} \right| = \frac{16,837 \cdot 10^6}{215,6 \cdot 10^3} + \frac{5,051 \cdot 10^6}{78,52 \cdot 10^3} = 142,4 \text{ MPa} < \sigma_a$$

la sezione è verificata.

I valori massimi della tensione si raggiungono ai vertici vicini all'asse di sollecitazione, e più precisamente si avrà trazione al vertice inferiore e compressione al vertice superiore. Per la rappresentazione del diagramma di tensione si deve definire l'inclinazione dell'asse neutro. Dal sagomario si ricavano i valori dei momenti d'inerzia principali della sezione.

$$J_x = 1509 \text{ cm}^4; \quad J_y = 549,7 \text{ cm}^4$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{J_x}{J_y} \cdot \text{tg}\alpha\right) = \arctg\left(\frac{1509}{549,7} \text{tg}(-16,7^\circ)\right) = -39,47^\circ$$



In figura è rappresentata la sezione progettata ed il diagramma delle tensioni.

Metodo agli S.L.U.

Determinazione delle sollecitazioni di progetto.

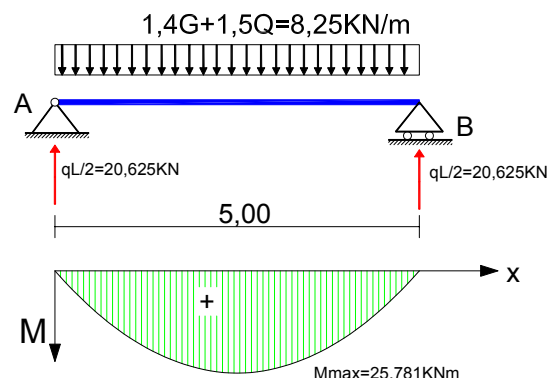
Per eseguire il progetto agli stati limite ultimi, si devono considerare la seguente combinazione di carico:

$$q = 1,4 \cdot G + 1,5 \cdot Q = 1,4 \cdot 1,875 + 1,5 \cdot 3,75 = 8,25 \text{ KN/m}$$

Con questa combinazione di carico si ottiene un momento flettente massimo di progetto pari a :

$$M_d = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{8,25 \cdot 5^2}{8} = 25,781 \text{ KNm}$$

Le componenti secondo gli assi principali d'inerzia della sezione del momento di progetto sono in valore assoluto i seguenti:



$$M_x = M_{\max} \cdot \cos \alpha = 25,781 \cdot \cos 16,7^\circ = 24,694 \text{ KNm}$$

$$M_y = M_{\max} \cdot \sin \alpha = 25,781 \cdot \sin 16,7^\circ = 7,408 \text{ KNm}$$

L'acciaio Fe 360 possiede una tensione di snervamento caratteristica f_{yk} pari a 235MPa alla quale applicando il coefficiente di sicurezza sul materiale $\gamma_m = 1,05$ comporta una tensione di progetto pari a:

$$\sigma_d = \frac{f_{yk}}{\gamma_m} = \frac{235}{1,05} = 223,8 \text{ MPa}$$

Fase di progetto

Per i profili tipo HE B si può assumere il rapporto tra i moduli di resistenza plastici $K=2,14$, ottenendo così il seguente modulo di resistenza plastico richiesto dalle sollecitazioni di progetto.

$$W_{plx} = \frac{M_{dx} + K \cdot M_{dy}}{\sigma_d} = \frac{(24,694 + 2,14 \cdot 7,408) \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{223,8 \text{ MPa}} = 181,176 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 181,176 \text{ cm}^3$$

Dal sagomario si ricava la sezione HE 140 B la quale possiede i seguenti moduli di resistenza plastici: $W_{plx} = 245,4 \text{ cm}^3$; $W_{ply} = 119,8 \text{ cm}^3$

Fase di verifica

Per effettuare la verifica si determinano dapprima i momenti flettenti ultimi a flessione retta nelle due direzioni principali e poi si effettua la verifica su dominio di resistenza.

$$M_{ux} = \sigma_d \cdot W_{plx} = 223,8 \cdot 245,4 \cdot 10^3 = 54,921 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 54,921 \text{ KNm}$$

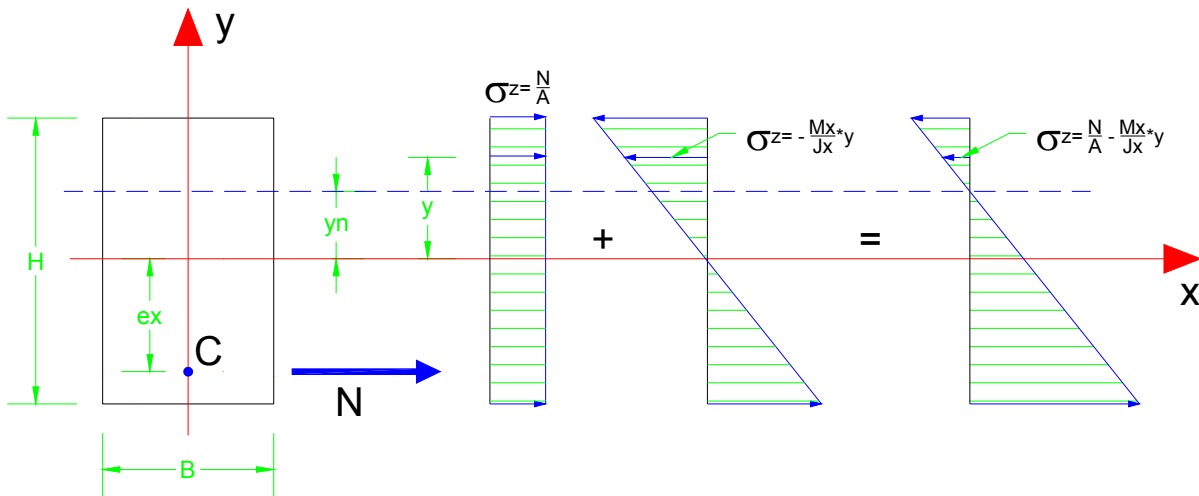
$$M_{uy} = \sigma_d \cdot W_{ply} = 223,8 \cdot 119,8 \cdot 10^3 = 26,811 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 26,811 \text{ KNm}$$

Verifica sul dominio di resistenza

$$\frac{M_{dx}}{M_{ux}} + \frac{M_{dy}}{M_{uy}} = \frac{24,694}{54,921} + \frac{7,408}{26,811} = 0,73 < 1$$

La sezione è verificata.

La sollecitazione di Tenso (Presso) Flessione retta



Supponiamo per semplicità di trattazione di avere una sezione rettangolare sollecitata da una forza \mathbf{N} di trazione (positiva) applicata in un punto \mathbf{C} (centro di sollecitazione) posizionato sull'asse \mathbf{y} alla coordinata $\mathbf{y}=\mathbf{e}_x$. Alla forza \mathbf{N} eccentrica, possiamo sostituire il sistema di forze equivalenti costituito dalla forza \mathbf{N} applicata nel baricentro e dal Momento di trasporto pari a $M = N \cdot e_x$. La sezione quindi può considerarsi soggetta contemporaneamente ad uno sforzo Normale N e ad un momento flettente $M_x = -N \cdot e_x$, dove il segno negativo si giustifica considerando che uno sforzo Normale positivo (di Trazione) applicato con una eccentricità positiva (e_x dal lato delle y positive), produce un momento flettente M_x negativo. La sollecitazione composta qui presentata viene detta di tenso-flessione retta o di presso-flessione retta a seconda che lo sforzo Normale applicato sia di trazione o di compressione.

Per determinare il campo tensionale in tale situazione di sollecitazione, nell'ipotesi di legame costitutivo linearmente elastico, può applicarsi il principio di sovrapposizione degli effetti ottenendo la seguente espressione che ci fornisce la tensione σ_z per la generica fibra alla distanza \mathbf{y} dall'asse \mathbf{x} .

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \cdot y$$

Ovviamente la massima e la minima sollecitazione si otterrà considerando le fibre più lontane dall'asse baricentrico.

Dall'espressione che si fornisce la tensione σ e ancor più evidentemente dalla figura nella quale sono rappresentati i diagrammi delle tensioni, si evidenzia che l'asse neutro non coincide più con l'asse baricentrico e anzi è posizionato rispetto a questo dal lato opposto del centro di sollecitazione \mathbf{C} .

Ricordando che: $M_x = -N \cdot e_x$ e che $J_x = A \cdot i_x^2$ dove i_x rappresenta il raggio d'inerzia della sezione rispetto all'asse \mathbf{x} , si può scrivere:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \cdot y = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_x}{A \cdot i_x^2} \cdot y = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{e_x}{i_x^2} \cdot y \right)$$

Poiché in corrispondenza dell'asse neutro si deve avere $\sigma = 0$, per \mathbf{N} diverso da zero deve essere:

$$\left(1 + \frac{e_x}{i_x^2} \cdot y\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_n = -\frac{i_x^2}{e_x}$$

e cioè, l'asse neutro è parallelo all'asse \mathbf{x} e taglia l'asse \mathbf{y} alla distanza $y_n = -\frac{i_x^2}{e_x}$. Il segno

negativo esprime la condizione che l'asse neutro ed il centro di sollecitazione \mathbf{C} sono posizionati dalla parte opposta rispetto al baricentro \mathbf{G} . Si può anche osservare che al crescere della eccentricità la coordinata y dell'asse neutro diminuisce e viceversa. Nel caso di eccentricità infinitamente grande l'asse neutro coincide con il baricentro e la sollecitazione diviene di flessione retta, mentre nel caso di eccentricità nulla l'asse neutro si posiziona all'infinito, il diagramma di tensione diviene costante e la sollecitazione può essere considerata di sforzo Normale centrato.

Per la sezione rettangolare si ha che:

$$A = B \cdot H; \quad J_x = \frac{B \cdot H^3}{12}; \quad i_x^2 = \frac{H^2}{12}; \quad y_{\max} = \pm \frac{H}{2}$$

dove con y_{\max} si intende la coordinata delle fibre più lontane dall'asse baricentrico \mathbf{x} . Le formule generali pre la tenso (presso) flessione retta, possono quindi essere specializzate per la sezione rettangolare nel seguente modo:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \cdot y = \frac{N}{B \cdot H} \pm \frac{N \cdot e_x}{B \cdot H^3 / 12} \cdot \frac{H}{2} = \frac{N}{B \cdot H} \cdot \left(1 \pm \frac{6 \cdot e_x}{H}\right) = \frac{N}{A} \cdot \left(1 \pm \frac{6 \cdot e_x}{H}\right)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left(1 \pm \frac{6 \cdot e_x}{H}\right)$$

Il segno più o meno va considerato positivo per la fibra estrema superiore, e negativo per la fibra estrema inferiore. Lo sforzo Normale \mathbf{N} è positivo se di trazione e negativo se di compressione, mentre l'eccentricità e_x assume il segno che compete alla coordinata \mathbf{y} del centro di sollecitazione \mathbf{C} .

La formula che fornisce la posizione dell'asse neutro, specializzata per la sezione rettangolare assume la seguente forma.

$$y_n = -\frac{i_x^2}{e_x} = -\frac{H^2}{12 \cdot e_x}$$

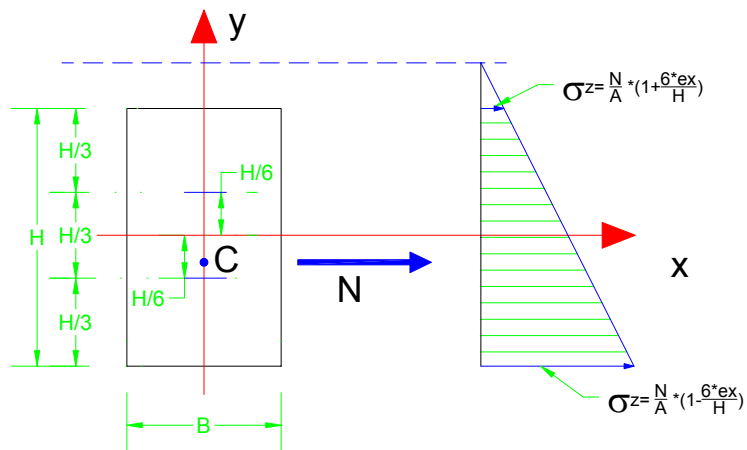
Se l'asse neutro taglia la sezione, si avranno tensioni di segno opposto alle fibre estreme, mentre se l'asse neutro è esterno alla sezione le fibre estreme presenteranno una tensione dello stesso segno algebrico. Ovviamente se l'asse neutro coincide con una delle fibre estreme (una delle due basi della sezione rettangolare) su tale fibra si ha una tensione nulla. La condizione di coincidenza dell'asse neutro con una fibra estrema della sezione sarà determinata dalla seguente condizione.

$$y_n = \frac{H}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{2} = -\frac{H^2}{12 \cdot e_x} \quad \Rightarrow \quad e_x = -\frac{2 \cdot H^2}{12 \cdot H} = -\frac{H}{6}$$

Se l'eccentricità è pari ad $\frac{H}{6}$, l'asse neutro coinciderà con la base dal lato opposto di **C**. Poiché all'aumentare dell'eccentricità l'asse neutro si avvicina al baricentro e viceversa, se l'eccentricità è minore di $\frac{H}{6}$, l'asse neutro non taglia la sezione e tutte le fibre saranno sollecitate da tensioni dello stesso segno algebrico. Se l'eccentricità è maggiore di $\frac{H}{6}$, l'asse neutro taglierà la sezione e le fibre dal lato opposto all'asse neutro saranno sollecitate da tensioni di segno opposto. In definitiva, riepilogando, a seconda dell'eccentricità dello sforzo **N**, si avranno i seguenti casi:

Caso 1) $|e_x| < \frac{H}{6}$

Tutte le fibre sono soggette a tensioni dello stesso segno, ed in particolare saranno tutte tensioni di trazione (positive) se lo sforzo Normale è di trazione (positivo) o viceversa tutte di compressione se lo sforzo Normale è di compressione.



Caso 2) $|e_x| = \frac{H}{6}$

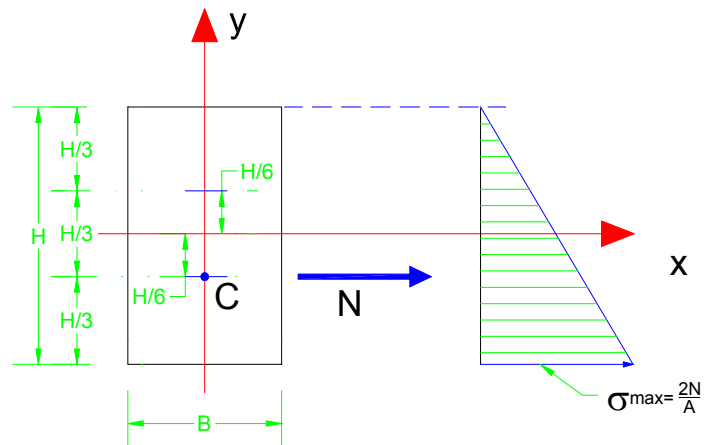
L'asse neutro coincide con la base dal lato opposto di **C**. Il diagramma delle tensioni sarà triangolare e la tensione massima potrà ottenersi semplicemente con la seguente formula:

$$\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot N}{A}$$

Infatti in tal caso si ha:

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot e_x}{H}\right) = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot H}{6 \cdot H}\right)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot (1+1) = \frac{2 \cdot N}{A}$$



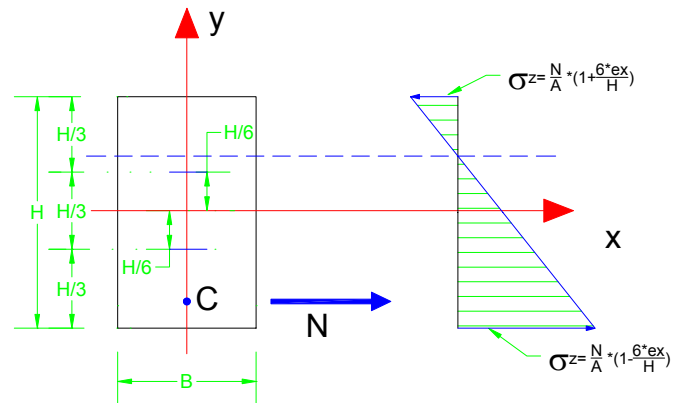
$$\text{Caso 3)} \quad |e_x| > \frac{H}{6}$$

L'asse neutro taglia la sezione e le fibre estreme risulteranno soggette a tensioni di segno opposto. Le tensioni massime e minime potranno determinarsi o con la formula di carattere generale,

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \cdot y$$

oppure con quella specifica per la sezione rettangolare.

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left(1 \pm \frac{6 \cdot e_x}{H} \right)$$



Si ricorda di utilizzare nella parentesi il segno positivo per le fibre dal lato delle y positive ed il segno negativo per le fibre dal lato delle y negative. Il segno dell'eccentricità sarà coerente con la posizione di C . Volendo svincolarsi dall'utilizzo della convenzione sui segni dell'eccentricità può operarsi utilizzando sempre un valore positivo per l'eccentricità ma tenendo presente che:

La tensione massima si verifica dal lato del centro di sollecitazione e risulta positiva (di trazione) se lo sforzo N applicato è di trazione, viceversa risulta negativa se lo sforzo N applicato è di compressione. In valore assoluto la tensione massima sarà ottenuta utilizzando nella parentesi il segno positivo, mentre la tensione minima in valore assoluto si ottiene considerando nella parentesi il segno negativo.

Nel caso in cui la tenso (presso flessione) retta si verifica per un eccentricità rispetto all'asse principale y , l'espressione che ci fornisce la tensione al variare di x è:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} \cdot x$$

Considerando che per un eccentricità e_y positiva abbinata ad N positiva (di trazione) si ricava un momento M_y anch'esso positivo, la formula generale può esprimersi anche nel modo che segue:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_y}{J_y} \cdot x = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{e_y}{i_y^2} \cdot x \right)$$

L'equazione dell'asse neutro in tal caso è:

$$x_n = -\frac{i_y^2}{e_y}$$

In maniera analoga e ovvia possono ricavarsi le formule specializzate per la sezione rettangolare.

Progetto e verifica di sezioni soggette a tenso (presso) flessione retta (M.T.A.).

La verifica delle sezioni tenso o presso inflesse, va condotta determinando la tensione massima di lavoro del materiale e confrontandola con le tensione ammissibile. Come formula per la determinazione della tensione potrà ovviamente utilizzarsi la formula generale o una formula specializzata per il tipo di sezione che si sta trattando.

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \cdot y \leq \sigma_a \quad \text{- formula di validità generale}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left(1 \pm \frac{6 \cdot e_x}{H} \right) \leq \sigma_a \quad \text{- formula valida per le sezioni rettangolari}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \leq \sigma_a \quad \text{- formula utilizzata solitamente per i profili in acciaio ed applicata utilizzando per i singoli termini i valori privi di segno.}$$

Per quanto attiene al progetto, nel caso della tenso o presso flessione, non possono ricavarsi, se non in casi molto specifici, delle formule di progetto, pertanto si procede solitamente effettuando successivi tentativi fino al soddisfacimento della condizione di verifica.

Come sezione di primo tentativo si procederà con un progetto allo sforzo Normale centrato se si ritiene che tale sollecitazione sia predominante su quella flettente o viceversa attraverso un progetto a flessione retta. Di solito per gli elementi strutturali pressappoco orizzontali l'azione predominante è rappresentata dalla componente flessionale, mentre per gli elementi tendenzialmente verticali l'azione principale sarà costituita dallo sforzo Normale.

Ovviamente l'attendibilità di tale supposizione va valutata caso per caso e comunque nella fase di verifica risulterà con maggiore evidenza se una delle due componenti di sollecitazione predomina sull'altra ottenendo quindi informazioni preziose per gli eventuali successivi tentativi di dimensionamento della sezione.

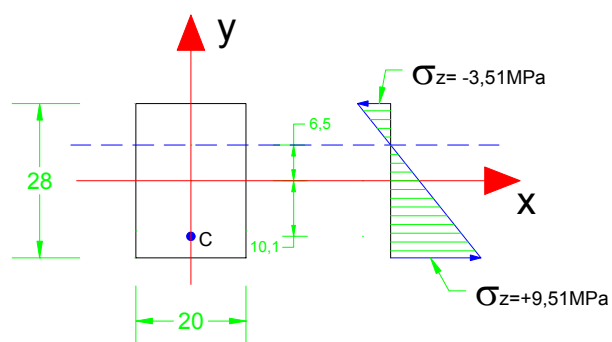
Facciamo qualche esempio numerico.

Una sezione rettangolare in legno, di dimensioni 20 x 28 cm, è sollecitata da uno sforzo Normale di trazione pari a 168 kN e da un momento flettente intorno all'asse principale x pari a 17 kNm. Si determini il campo tensionale e si verifichi la sezione assumendo che la tensione ammissibile del materiale è pari a 10 MPa.

Determiniamo le caratteristiche geometriche della sezione.

$$A = 20 \cdot 28 = 560 \text{ cm}^2 = 560 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$J_x = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{20 \cdot 28^3}{12} = 36587 \text{ cm}^4 = 36587 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$



$$i_x^2 = \frac{H^2}{12} = \frac{28^2}{12} = 65,33 \text{ cm}^2 = 6533 \text{ mm}^2$$

$$y_{\max} = \pm \frac{H}{2} = \frac{28}{2} = \pm 14 \text{ cm} = \pm 140 \text{ mm}$$

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{36587 \cdot 10^4}{\pm 140} = \pm 2613 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Il segno del modulo di resistenza elastico W_x va considerato positivo per la fibra al lembo superiore e negativo per la fibra al lembo inferiore.

L'eccentricità dello sforzo Normale N è pari a:

$$e_x = -\frac{M_x}{N} = -\frac{17 \text{ KNm}}{168 \text{ KN}} = -\frac{17 \cdot 10^3 \text{ KNmm}}{168 \text{ KN}} = 101 \text{ mm}$$

L'eccentricità $e_x > \frac{H}{6} = \frac{280}{6} = 46,7 \text{ mm}$, quindi l'asse neutro taglierà la sezione e ai due lembi opposti si hanno tensioni di segno opposto. Determiniamo la posizione dell'asse neutro.

$$y_n = -\frac{i_x^2}{e_x} = -\frac{6533 \text{ mm}^2}{-101 \text{ mm}} = 64,7 \text{ mm}$$

Il risultato ci conferma ciò che ci aspettavamo. L'asse neutro taglia la sezione ed è posizionato dalla parte opposta del centro di sollecitazione. Passiamo alla verifica. Con l'indice s indico la tensione al lembo superiore, mentre quella al lembo inferiore la indico con l'indice i .

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} = \begin{cases} \sigma^s = \frac{168 \cdot 10^3}{560 \cdot 10^2} - \frac{17 \cdot 10^6}{2613 \cdot 10^3} = -3,51 \text{ MPa} \\ \sigma^i = \frac{168 \cdot 10^3}{560 \cdot 10^2} - \frac{17 \cdot 10^6}{-2613 \cdot 10^3} = +9,51 \text{ MPa} \end{cases}$$

La tensione ammissibile del materiale è pari a 10 MPa, quindi la verifica è soddisfatta in quanto si ha: $|\sigma| < \sigma_a$. In figura è rappresentato il campo tensionale.

Esempio di progetto di una sezione tenso inflessa in acciaio.

Si vuole progettare la sezione di una trave in acciaio sollecitata da uno sforzo di trazione $N=40 \text{ KN}$ e da un momento flettente $M_x=16 \text{ KNm}$. Si adotti nel progetto un acciaio tipo Fe 360 la cui tensione ammissibile è pari a 160 MPa.

L'eccentricità di applicazione dello sforzo Normale è pari a:

$$e_x = -\frac{M_x}{N} = -\frac{16 \cdot 10^6 \text{ Nmm}^2}{40 \cdot 10^3 \text{ N}} = -400 \text{ mm}$$

Trattandosi di un'eccentricità piuttosto elevata, si ritiene maggiormente influente ai fini delle tensioni la sollecitazione flessionale e pertanto il progetto della sezione viene condotto effettuando come primo tentativo il dimensionamento della sezione secondo la sollecitazione di flessione retta. Si ricava quindi il modulo di resistenza elastico della sezione.

$$W_x = \frac{M_x}{\sigma_a} = \frac{16 \cdot 10^6}{160} = 100 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 100 \text{ cm}^3$$

Preferendo una sezione di tipo IPE, dal sagomario ricaviamo che la sezione IPE 160 possiede le seguenti caratteristiche meccaniche:

$$IPE 160 \quad A = 20,09 \text{ cm}^2 \quad W_x = 108,7 \text{ cm}^3$$

Eseguiamo la verifica la tenso flessione determinando solo la tensione massima di lavoro in termini assoluti.

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} = \frac{40 \cdot 10^3}{2009} - \frac{16 \cdot 10^6}{-108,7 \cdot 10^3} = +167 \text{ MPa}$$

Poiché la tensione di lavoro ottenuta è maggiore della tensione ammissibile, occorre ridimensionare la sezione adottando una sezione di dimensioni maggiori. Una sezione IPE 180 soddisferà certamente i requisiti richiesti.

$$IPE 180 \quad A = 23,95 \text{ cm}^2 \quad W_x = 146,3 \text{ cm}^3 \quad i_x^2 = 7,42^2 = 55,06 \text{ cm}^2$$

Ripetiamo la verifica per la sezione IPE 180

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} = \frac{40 \cdot 10^3}{2395} - \frac{16 \cdot 10^6}{-146,3 \cdot 10^3} = +126 \text{ MPa} ; \text{ la sezione è verificata}$$

La posizione dell'asse neutro è:

$$y_n = -\frac{i_x^2}{e_x} = -\frac{5506}{-400} = 13,76 \text{ mm}$$

La tensione massima prima calcolata si verifica al lembo inferiore mentre al lembo superiore la tensione normale è pari a:

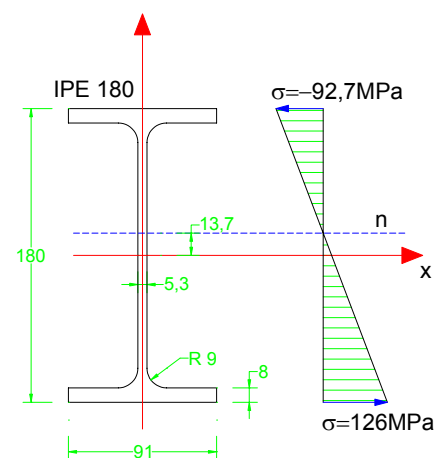
$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} = \frac{40 \cdot 10^3}{2395} - \frac{16 \cdot 10^6}{+146,3 \cdot 10^3} = -92,7 \text{ MPa}$$

In figura è riportata la sezione e il campo tensionale. Non è riportato il centro di sollecitazione in quanto esterno alla sezione e piuttosto distante da questa.

Esempio di progetto di un plinto di fondazione

Si vuole dimensionare la sezione di base di un plinto di fondazione sul quale agisce uno Sforzo Normale di compressione pari a 400KN ed un Momento flettente pari a 60 KNm. Si dimensiona la sezione in maniera tale il campo tensionale sia tutto di compressione e che la tensione massima sul terreno sia minore o al massimo uguale a 200 KPa.

Utilizzando nei calcoli il cm come unità di lunghezza e ricordando che:



$$1KPa = 1000Pa = 1000 \frac{N}{m^2} = 0,1 \frac{N}{cm^2}; \quad \text{e cioè:} \quad 1 \frac{N}{cm^2} = 10KPa$$

si ha:

$$e_x = -\frac{M_x}{N} = -\frac{60 \cdot 10^2 KNcm}{-400KN} = 15cm$$

Affinché tutta la sezione risulti compressa, il lato H in direzione dell'eccentricità deve avere almeno una lunghezza tale che:

$$e_x \leq \frac{H}{6} \quad \Rightarrow \quad H \geq 6 \cdot e_x = 6 \cdot 15 = 90cm.$$

Per avere un'idea di massima delle dimensioni del plinto si effettua un dimensionamento di massima a sforzo Normale centrato.

$$A = \frac{|N|}{\sigma_a} = \frac{400 \cdot 10^3 N}{200 \cdot 10^{-1} \frac{N}{cm^2}} = 20000cm$$

Ipotizzando una sezione quadrata il lato dovrebbe avere almeno la seguente dimensione.

$$l = \sqrt{A} = \sqrt{20000} = 142cm \quad \Rightarrow \quad l = 150cm$$

La dimensione ottenuta garantirebbe che tutto il campo tensionale sia di compressione, ma sicuramente la tensione massima risulterebbe maggiore di quella ammissibile in quanto tale dimensione è stata ottenuta trascurando il momento flettente. Per quanto sopra consideriamo in prima approssimazione una sezione rettangolare di dimensioni:

$$B = 150cm \quad H = 170cm \quad A = B \cdot H = 25500cm^2$$

La tensione massima in valore assoluto in tale ipotesi è:

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot e_x}{H}\right) = \frac{400 \cdot 10^3}{25500} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 15}{170}\right) = 24 \frac{N}{cm^2} = 240KPa$$

La tensione ottenuta è maggiore della tensione ammissibile, si amplierà quindi la sezione per procedere ad un secondo tentativo di progetto.

$$B = 160cm \quad H = 180cm \quad A = B \cdot H = 28800cm^2$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot e_x}{H}\right) = \frac{400 \cdot 10^3}{28800} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 15}{180}\right) = 20,8 \frac{N}{cm^2} = 208KPa$$

La tensione è ancora maggiore, anche se di poco, alla tensione ammissibile. Nel successivo tentativo si aumenterà di 10cm solo l'altezza della sezione.

$$B = 160cm \quad H = 190cm \quad A = B \cdot H = 30400cm^2$$

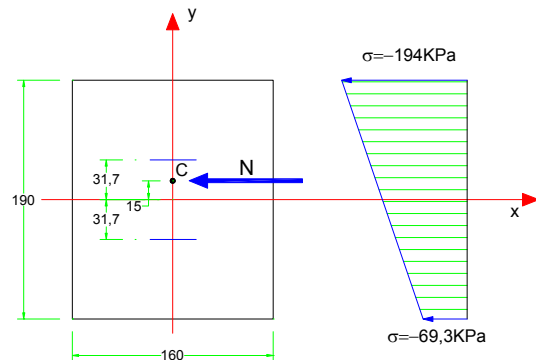
$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot e_x}{H} \right) = \frac{400 \cdot 10^3}{30400} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 15}{190} \right) = 19,4 \frac{N}{cm^2} = 194 KPa < \sigma_a$$

La sezione è verificata.

$$\sigma^i = \frac{N}{A} \cdot \left(1 - \frac{6 \cdot e_x}{H} \right) = \frac{400 \cdot 10^3}{30400} \cdot \left(1 - \frac{6 \cdot 15}{190} \right) = 6,93 \frac{N}{cm^2} = 69,3 KPa < \sigma_a$$

La tensione massima di compressione si verifica al lembo superiore della sezione, mentre al lembo inferiore agirà sempre una tensione di compressione, ma minore di quella al lembo superiore.

Entrambe le tensioni devono intendersi negative. In figura è riportata la sezione ed il diagramma di tensioni.



La sollecitazione di presso flessione nei materiali non resistenti a trazione.

Esistono materiali che pur presentando una discreta resistenza a compressione, manifestano una scarsa resistenza a trazione. Tipici esempi di tali materiali sono le murature in pietra naturale o in blocchi artificiali, il calcestruzzo non armato e i terreni di fondazione. Tali materiali, potranno quindi essere impiegati solo per la costruzione di elementi strutturali soggetti a compressione semplice o a presso flessione ma senza che si verifichino sulla sezione tensioni di trazione.

Affinché nella sezione si abbia un campo tensionale tutto di compressione, l'eccentricità del carico deve essere minore di un sesto della dimensione del lato nella direzione dell'eccentricità. In pratica la condizione di carico della sezione deve rientrare nel 1° o nel 2° caso analizzato in precedenza.

Nel caso invece che l'eccentricità sia maggiore di un sesto del lato, poiché il materiale non resiste a trazione, il campo tensionale che si sviluppa nella sezione dovrà essere tale da avere solo tensioni di compressione la cui risultante equilibri lo sforzo **N** applicato. La condizione di equilibrio in tali circostanze è possibile solo se il centro di sollecitazione risulti comunque interno alla sezione e considerando un campo di tensione che interessi solo parzialmente la sezione. Facendo riferimento alla figura, si nota che l'equilibrio può essere assicurato considerando reagente nella direzione dell'eccentricità solo la parte di lunghezza pari a tre volte la distanza *u* del centro di sollecitazione dal bordo esterno. In pratica la sezione reagente risulta di dimensioni *B* x *3u* e il centro di sollecitazione risulterà coincidente con il terzo medio del lato di dimensioni *3u*. Si rientra così nel 2° caso analizzato in precedenza e la tensione massima che si verifica al bordo esterno della sezione sarà pari a:

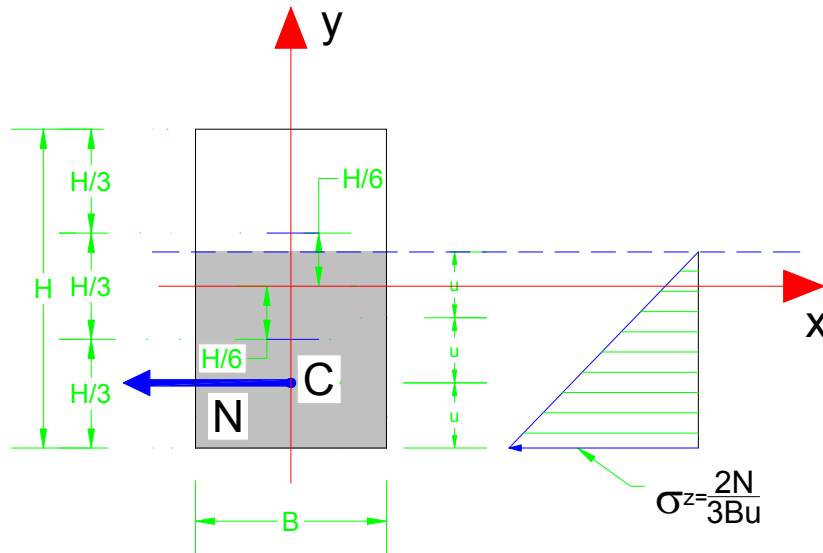
$$\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot N}{3 \cdot B \cdot u}$$

Che la condizione presentata sia una condizione di equilibrio può essere facilmente verificata determinando la risultante del diagramma di tensioni e verificando che sia proprio pari a **N** e che risulti applicata sulla stessa retta d'azione di **N**.

La risultante del diagramma di tensioni è:

$$R = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{\max} \cdot 3 \cdot u \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot N}{3 \cdot B \cdot u} \cdot 3 \cdot u \cdot B = N$$

Essendo il diagramma triangolare la risultante R risulta applicata ad un terzo dell'altezza e cioè alla distanza u dal bordo inferiore della sezione. La retta d'azione di R coincide con la retta d'azione di N.



Ricapitolando, nel caso di materiali non resistenti a trazione, se il centro di sollecitazione è interno alla sezione ma esterno al terzo medio ($e_x > H/6$), la condizione di equilibrio si verifica considerando una sezione di dimensioni $B \times 3u$ dove con u si è indicata la distanza del punto di sollecitazione dal bordo esterno. La sezione così parzializzata risulterà soggetta ad un diagramma di tensione di compressione triangolare e la tensione massima si ottiene applicando la seguente formula:

$$\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot N}{3 \cdot B \cdot u}$$

Il metodo appena descritto è conosciuto come "il metodo del $3u$ ".

Facciamo un esempio numerico

Si consideri un pilastro di muratura di mattoni pieni, quadrato e di dimensioni 51×51 cm. Il pilastro risulta sollecitato da uno sforzo Normale di compressione eccentrico rispetto all'asse principale x della sezione. Si determini la massima tensione di compressione che si verifica sulla sezione del pilastro considerando che $N=40$ kN e che $e=13$ cm.

$$\frac{H}{6} = \frac{51}{6} = 8,5 \text{ cm} \quad \Rightarrow e > \frac{H}{6}$$

L'eccentricità è maggiore di un sesto della dimensione del lato del pilastro. La sezione si parzializza e per determinare il campo tensionale si deve ricorrere al metodo del $3u$.

La distanza dal bordo esterno del centro di sollecitazione è:

$$u = \frac{H}{2} - e = \frac{51}{2} - 13 = 12,5\text{cm}$$

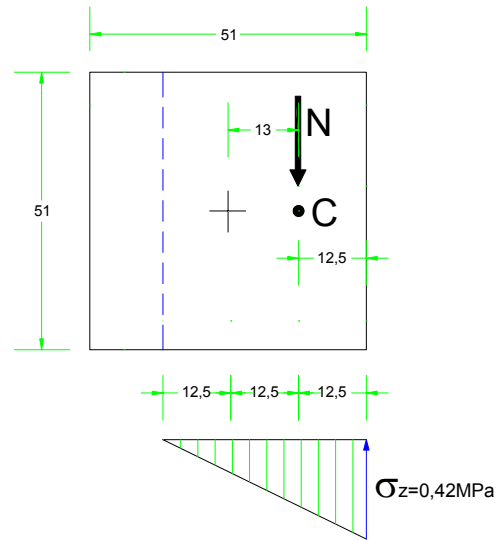
La sezione reagente avrà dimensioni :

$$B = 51\text{cm}; \quad H = 3 \cdot u = 3 \cdot 12,5 = 37,5\text{cm}$$

Il diagramma delle tensioni è triangolare e la tensione massima si ottiene con la formula:

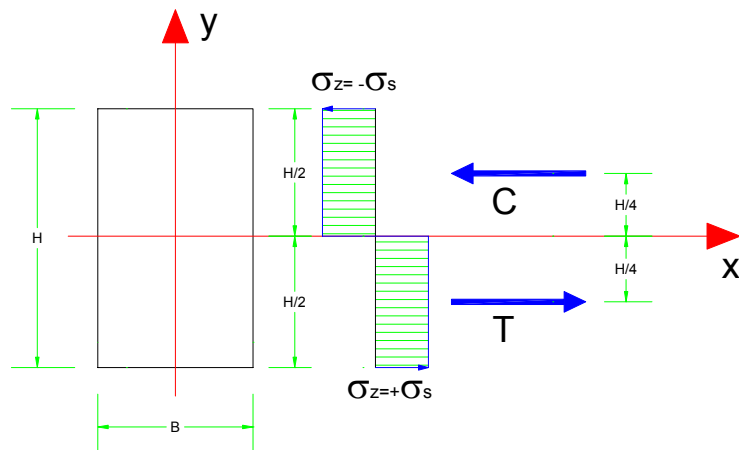
$$\sigma = \frac{2 \cdot N}{B \cdot 3 \cdot u} = \frac{2 \cdot 40000}{510 \cdot 375} = 0,42\text{MPa}$$

In figura è rappresentata la sezione del pilastro ed il diagramma delle tensioni. Nei calcoli è stato considerato sia lo sforzo Normale che le tensioni con i valori privi di segno, essendo palese che si tratta di sollecitazione e di tensioni di sola compressione.



La tenso (presso) flessione retta in campo plastico

Nel caso della flessione retta abbiamo constatato attraverso le condizioni di equilibrio che l'asse neutro sotto l'azione del Momento flettente ultimo, divide la sezione in due parti di uguale Area. Le due parti di sezione saranno inoltre soggette ad un campo di tensione costante e pari in ogni punto alla tensione di snervamento σ_s ma di segno opposto. Riferendoci alla sezione rettangolare riportata a lato, nella quale sono indicate con **C** e con **T** rispettivamente la risultante del campo tensionale della zona compressa e delle zona tesa, se l'asse neutro divide la sezione in due parti uguali si ha il caso di flessione retta, infatti:



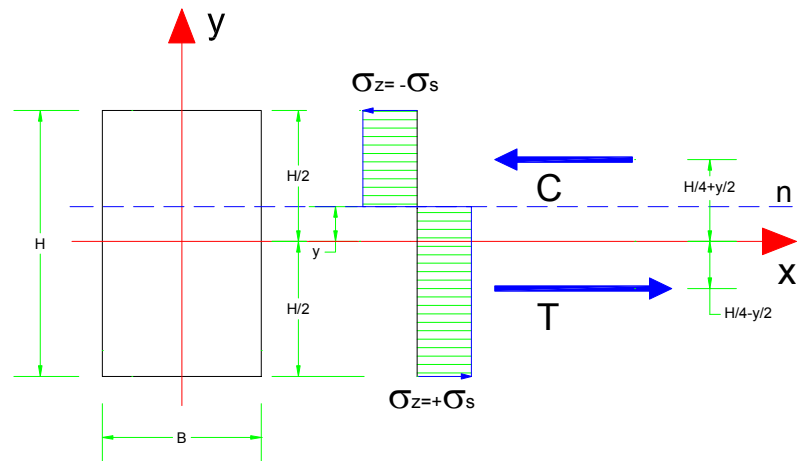
$$C = -\sigma_s \cdot A_s = -\sigma_s \cdot B \cdot \frac{H}{2}; \quad T = \sigma_s \cdot A_t = \sigma_s \cdot B \cdot \frac{H}{2}$$

$$T + C = N \quad \Rightarrow \quad N = \sigma_s \cdot B \cdot \frac{H}{2} - \sigma_s \cdot B \cdot \frac{H}{2} = 0$$

$$M_{ux} = T \cdot \frac{H}{2} = \sigma_s \cdot B \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{H}{2} = \sigma_s \cdot B \cdot \frac{H^2}{4}$$

Le risultanti **C** e **T** costituiscono una coppia il cui Momento è pari al Momento ultimo della sezione.

Supponiamo ora che la sezione risulti completamente elasticizzata con tensioni di segno opposto dai due lati dell'asse neutro e che l'asse neutro non divida la sezione in due parti uguali. E' il caso per esempio rappresentato della figura a fianco dove abbiamo una sezione rettangolare plasticizzata, con tensioni di trazione nella parte inferiore e di compressione nella parte superiore e con l'asse neutro spostato verso l'alto rispetto all'asse di simmetria x della quantità y .



In tali condizioni T e C non costituiscono più una coppia, infatti nel caso specifico è evidente che T risulti in modulo maggiore di C e quindi oltre a

continuare a fornire ancora un momento M_x rispetto all'asse x baricentrico, seppur minore del momento ultimo a flessione retta, si avrà uno sforzo Normale N diverso da zero. La sezione risulta sollecitata a tenso flessione. Si ha infatti:

$$C = \sigma_s \cdot B \cdot \left(\frac{H}{2} - y \right); \quad T = \sigma_s \cdot B \cdot \left(\frac{H}{2} + y \right)$$

$$N = T - C$$

$$N = \sigma_s \cdot B \cdot \left(\frac{H}{2} + y \right) - \sigma_s \cdot B \cdot \left(\frac{H}{2} - y \right) = \sigma_s \cdot B \cdot \left(\frac{H}{2} + y - \frac{H}{2} + y \right)$$

$$N = 2 \cdot \sigma_s \cdot B \cdot y$$

$$M_x = T \cdot \left[\frac{\left(\frac{H}{2} + y \right)}{2} - y \right] + C \cdot \left[\frac{\left(\frac{H}{2} - y \right)}{2} + y \right] = T \cdot \left[\frac{H}{4} + \frac{y}{2} - y \right] + C \cdot \left[\frac{H}{4} - \frac{y}{2} + y \right]$$

$$M_x = T \cdot \left[\frac{H}{4} - \frac{y}{2} \right] + C \cdot \left[\frac{H}{4} + \frac{y}{2} \right]$$

L'espressione appena ottenuta, esprime in maniera chiara fisicamente il Momento flettente ultimo della sezione in funzione della posizione dell'asse neutro. Se però si sviluppa ulteriormente la funzione sostituendo in essa le espressioni di C e T prima ricavate, si ottiene un'espressione più sintetica per il calcolo di M_x e che esplicita in maniera evidente che il valore di M_x è sempre minore di M_{ux} per qualsiasi valore di y diverso da zero.

$$M_x = T \cdot \left[\frac{H}{4} - \frac{y}{2} \right] + C \cdot \left[\frac{H}{4} + \frac{y}{2} \right] = \frac{T}{2} \cdot \left[\frac{H}{2} - y \right] + \frac{C}{2} \cdot \left[\frac{H}{2} + y \right]$$

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot \sigma_s \cdot B \cdot \left[\frac{H}{2} + y \right] \cdot \left[\frac{H}{2} - y \right] + \frac{1}{2} \cdot \sigma_s \cdot B \cdot \left[\frac{H}{2} - y \right] \cdot \left[\frac{H}{2} + y \right]$$

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot \sigma_s \cdot B \cdot \left[\frac{H^2}{4} - y^2 + \frac{H^2}{4} - y^2 \right]$$

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot \sigma_s \cdot B \cdot 2 \cdot \left[\frac{H^2}{4} - y^2 \right] = \sigma_s \cdot B \cdot \left[\frac{H^2}{4} - y^2 \right]$$

Ricordando che:

$$M_{ux} = \sigma_s \cdot B \cdot \frac{H^2}{4}$$

si ha:

$$M_x = \sigma_s \cdot B \cdot \frac{H^2}{4} - \sigma_s \cdot B \cdot y^2 = M_{ux} - \sigma_s \cdot B \cdot y^2$$

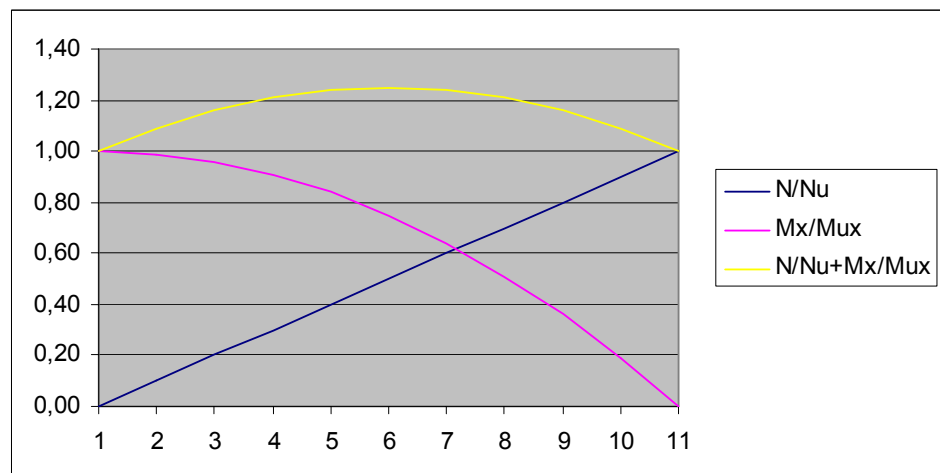
Il momento ultimo M_x in condizioni di tenso o presso flessione, è sempre minore del Momento flettente ultimo che si ha in assenza di sforzo Normale (flessione retta).

I Domini di Resistenza

Per poter analizzare la capacità di resistenza ultima della sezione in termini di coppie di valori \mathbf{N} , \mathbf{M}_x , si deve costruire il dominio di resistenza della sezione a tenso (presso) flessione. Analizziamo subito il caso della sezione rettangolare, per la quale abbiamo appena ricavato le formule necessarie alla determinazione dei valori di \mathbf{N} e di \mathbf{M}_x al variare della posizione dell'asse neutro. Ci limiteremo ad analizzare le posizioni con y positiva e con tensioni di trazione nella parte di sezione al disotto dell'asse neutro. In tali condizioni lo sforzo Normale che si ottiene risulta di trazione ed il Momento flettente risulta positivo. E' ovvio però che data la completa simmetria della sezione analizzata e l'eguale capacità di resistenza a trazione e compressione del materiale, i risultati ottenuti per le coppie di valori \mathbf{N} e \mathbf{M}_x , potranno considerarsi validi con qualunque combinazione di segno algebrico.

I valori sono stati sviluppati sulla sezione rettangolare con lati $B=180\text{mm}$, $H=240\text{mm}$. La tensione di snervamento è stata considerata di valore unitario.

Per ogni posizione dell'asse neutro sono stati determinati anche i rapporti \mathbf{N}/\mathbf{N}_u e $\mathbf{M}_x/\mathbf{M}_{ux}$ nonché la somma dei suddetti rapporti, ottenendo in tal modo



un'espressione del dominio di resistenza adimensionalizzato e rappresentativo del tipo di sezione rettangolare.

Dominio di resistenza a tensoflessione retta di una sezione rettangolare

B= 180 mm
H= 240 mm

$\sigma_s=1$
A= 43200
M_{ux}= 2592000
N_u= 43200

Punti	Y=	C	T	N	M _x	N/N _u	M _x /M _{ux}	N/N _u +M _x /M _{ux}
0	0	21600	21600	0	2592000	0	1	1
1	12	19440	23760	4320	2566080	0,1	0,99	1,09
2	24	17280	25920	8640	2488320	0,2	0,96	1,16
3	36	15120	28080	12960	2358720	0,3	0,91	1,21
4	48	12960	30240	17280	2177280	0,4	0,84	1,24
5	60	10800	32400	21600	1944000	0,5	0,75	1,25
6	72	8640	34560	25920	1658880	0,6	0,64	1,24
7	84	6480	36720	30240	1321920	0,7	0,51	1,21
8	96	4320	38880	34560	933120	0,8	0,36	1,16
9	108	2160	41040	38880	492480	0,9	0,19	1,09
10	120	0	43200	43200	0	1	0	1

Sia dal diagramma prima presentato che dai risultati numerici si evidenzia come lo sforzo Normale vari linearmente con **y** mentre il momento flettente **M_x** varia con legge quadratica. La somma dei

rapporti $\frac{N}{N_u} + \frac{M_x}{M_{ux}}$, varia tra 1 (valore che si ottiene per le sollecitazioni di sforzo Normale

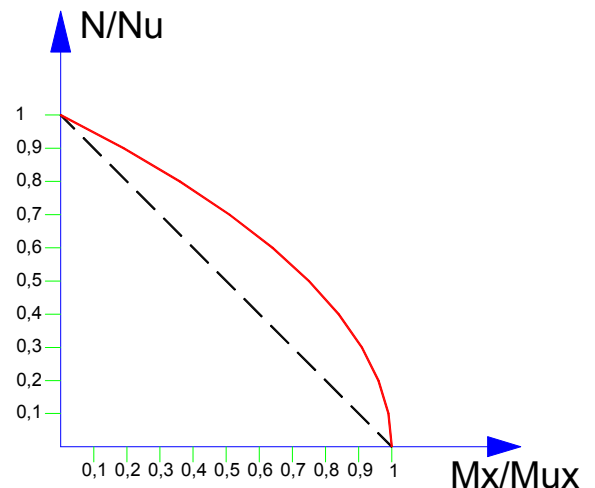
centrato e di flessione retta, $y=0$ e per $y=H/2$) ed il valore massimo di 1,25 che si raggiunge quando l'asse neutro divide la sezione in due parti le cui superfici misurano l'una $\frac{1}{4}$ dell'area totale e l'altra è $\frac{3}{4}$ dell'area totale della sezione.

Nel grafico a fianco è riportato in rosso il dominio di resistenza adimensionalizzato di calcolo ed in nero il dominio semplificato costituito dalla retta che congiunge i valori ultimi che si hanno in condizioni di solo sforzo Normale ed in condizione di sola flessione retta.

E' utile notare che per valori di **N** piuttosto contenuti ($N < 0,10 \div 0,15 N_u$) il Momento flettente massimo che può essere assorbito dalla sezione si riduce solo dell'1% ÷ 2% e quindi entro tali limiti di **N** considerando i normali valori dei coefficienti di sicurezza potrà trascurarsi l'effetto dello sforzo Normale e considerare sezione sollecitata a flessione retta.

La completa simmetria della sezione rettangolare ci ha consentito di determinare le resistenze facendo variare l'asse neutro entro la sola metà superiore della sezione potendo facilmente estendere i risultati ottenuti a tutto il possibile campo di variazione.

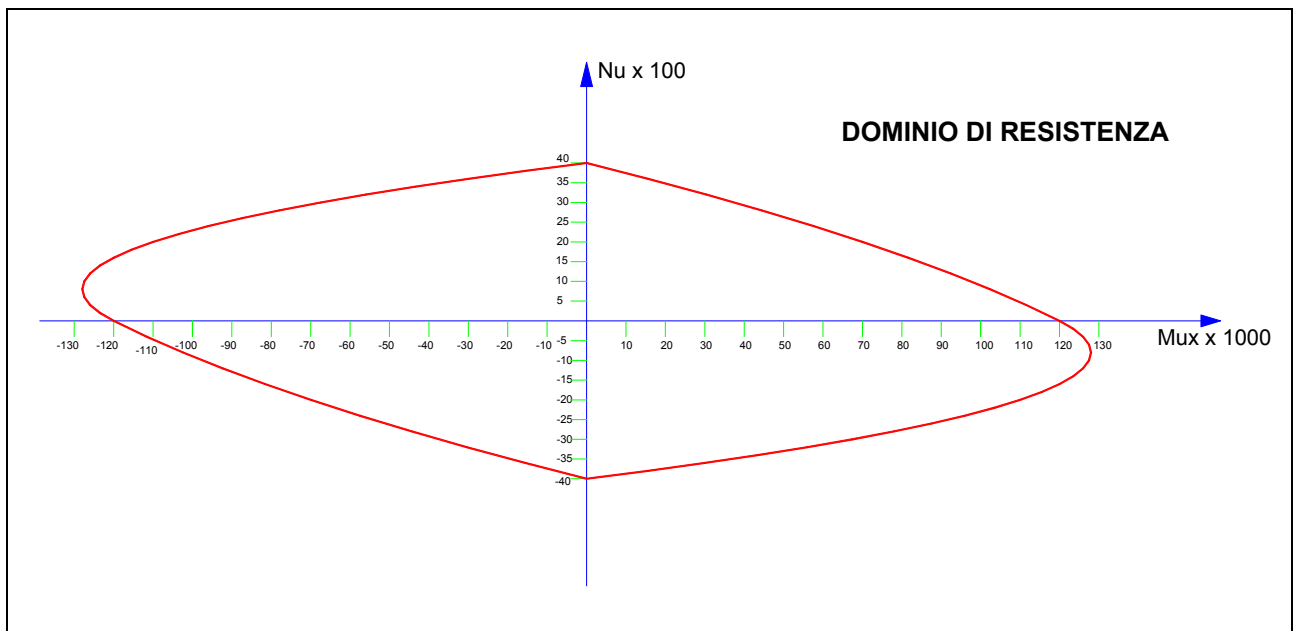
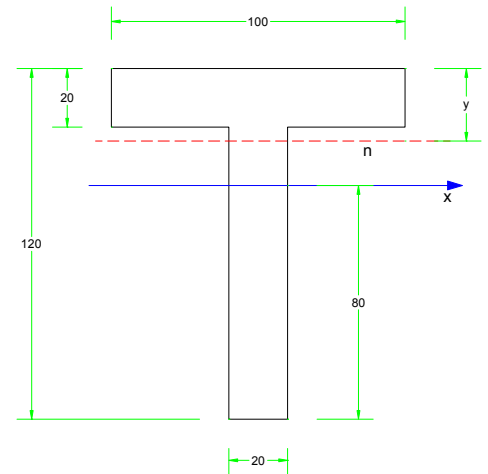
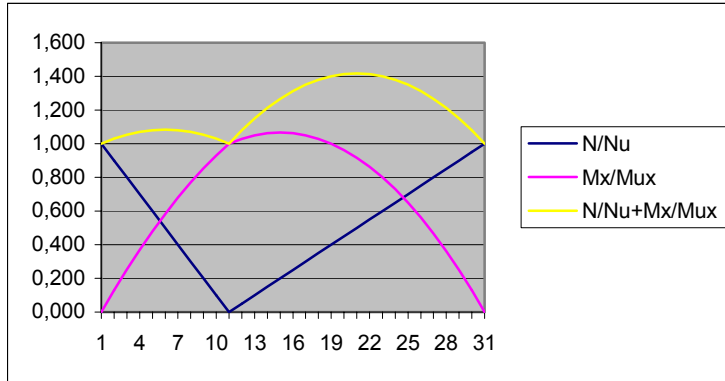
La situazione è diversa invece se si analizzano sezioni per le quali solo l'asse di sollecitazione è un asse di simmetria, mentre l'asse intorno al quale agisce il momento flettente ha solo la caratteristica di essere un asse baricentrico. Solo per dare un esempio delle difficoltà che si incontrano nell'analizzare sezioni che non risultano simmetriche rispetto ai due assi principali, si presenta qui il caso della sezione a T pur senza approfondirne i risultati ottenuti.



Per una sezione a T la condizione di sforzo Normale nullo e Momento flettente ultimo a flessione retta, corrisponde ad una posizione dell'asse neutro che divide la sezione in due parti di uguale Area. Se costruiamo il dominio di resistenza facendo variare la posizione dell'asse neutro a partire dal lembo superiore fino a raggiungere il lembo inferiore e passando per la posizione corrispondente alla sollecitazione di flessione retta, si verifica un comportamento resistente della sezione completamente diverso da quello riscontrato nella sezione rettangolare. Si verifica in particolare che la posizione corrispondente alla flessione retta dell'asse neutro non fornisce il massimo momento flettente resistente per la sezione, che invece si raggiunge quando l'asse neutro risulta baricentrico.; a tale valore del momento flettente risulta però abbinato uno sforzo Normale di compressione. Ovviamente tale capacità di resistenza a flessione potrà ottenersi solo se sulla sezione agisce uno sforzo Normale di compressione con valore tale da determinare che la posizione dell'asse neutro risulti baricentrica.

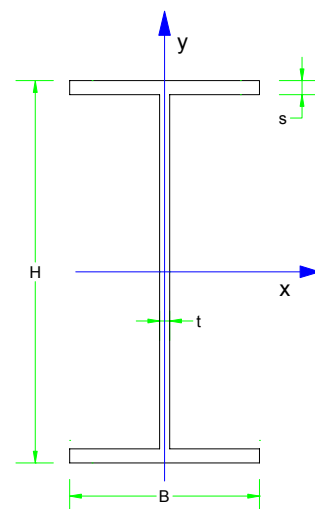
Si riportano appresso la tabella con i risultati ottenuti e un grafico esplicativo degli indici di resistenza in termini assoluti. Ovviamente le coppie di valori N e M_x potranno intendersi valide anche a segni invertiti.

DOMINIO DI RESISTENZA A TENSO-PRESSO FLESSIONE RETTA. SEZIONE A T						
B=	100	A=	4000	$\sigma_s=1$		
s=	20	Yg=	80	Nu=	4000	
H=	120	posizione asse neutro a flessione retta		y=	20	
b=	20	Momento ultimo a flessione retta		Mux=	120000	
posizione	y=	N	Mx	N/Nu	Mx/Mux	N/Nu+Mx/Mux
0	0	4000	0	1,000	0,000	1,000
1	2	3600	15600	0,900	0,130	1,030
2	4	3200	30400	0,800	0,253	1,053
3	6	2800	44400	0,700	0,370	1,070
4	8	2400	57600	0,600	0,480	1,080
5	10	2000	70000	0,500	0,583	1,083
6	12	1600	81600	0,400	0,680	1,080
7	14	1200	92400	0,300	0,770	1,070
8	16	800	102400	0,200	0,853	1,053
9	18	400	111600	0,100	0,930	1,030
10	20	0	120000	0,000	1,000	1,000
11	25	-200	123500	0,050	1,029	1,079
12	30	-400	126000	0,100	1,050	1,150
13	35	-600	127500	0,150	1,063	1,213
14	40	-800	128000	0,200	1,067	1,267
15	45	-1000	127500	0,250	1,063	1,313
16	50	-1200	126000	0,300	1,050	1,350
17	55	-1400	123500	0,350	1,029	1,379
18	60	-1600	120000	0,400	1,000	1,400
19	65	-1800	115500	0,450	0,963	1,413
20	70	-2000	110000	0,500	0,917	1,417
21	75	-2200	103500	0,550	0,863	1,413
22	80	-2400	96000	0,600	0,800	1,400
23	85	-2600	87500	0,650	0,729	1,379
24	90	-2800	78000	0,700	0,650	1,350
25	95	-3000	67500	0,750	0,563	1,313
26	100	-3200	56000	0,800	0,467	1,267
27	105	-3400	43500	0,850	0,363	1,213
28	110	-3600	30000	0,900	0,250	1,150
29	115	-3800	15500	0,950	0,129	1,079
30	120	-4000	0	1,000	0,000	1,000



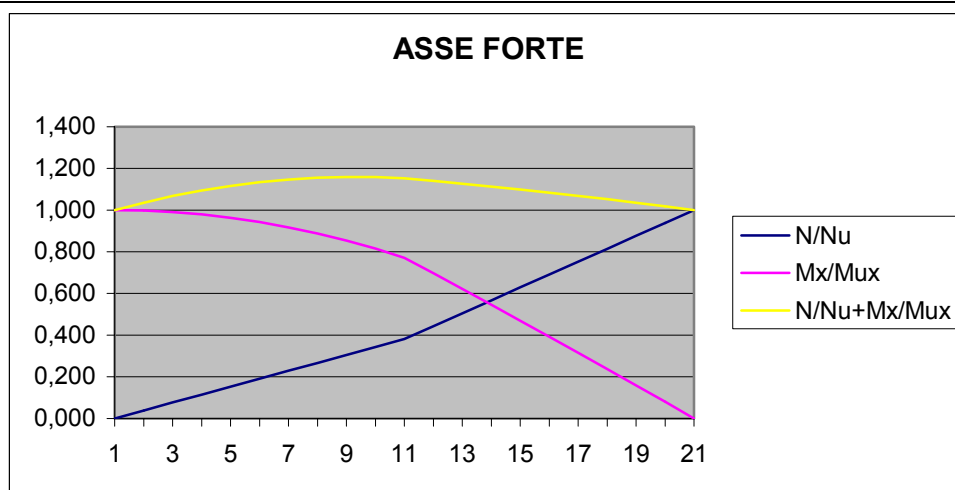
I Domini di Resistenza nelle sezioni a Doppio T

Analizziamo ora le tipiche sezioni a doppio T utilizzate nelle strutture in acciaio. Vengono qui determinati i Domini di resistenza di due sezioni di pari altezza ma di tipo diverso. Si analizza dapprima una sezione a doppio T con le dimensioni di una IPE 300 e successivamente una sezione tipo HE B 300; per entrambe nel calcolo si trascurerà il raccordo circolare all'attacco ala anima. Le sezioni tipo IPE sono caratterizzate dall'aver l'altezza pari a circa il doppio della Base, e da spessori d'anima piuttosto esigui. Tali sezioni sono spesso utilizzate nelle travi prevalentemente soggette a flessione retta, presentando una notevole differenza di resistenza nelle due direzioni principali. Le sezioni tipo HE invece, hanno una forma più quadrata e spessori d'anima maggiori. Le sezioni tipo HE vengono utilizzate sia nelle travi inflesse sia negli elementi verticali soggetti a sollecitazioni di sforzo Normale e



Momento flettente. La determinazione dei domini di resistenza relativi ai Momenti rispetto ad entrambi gli assi principali, mette in evidenza la diversità di comportamento della sezione nelle due direzioni. Le distanze dell'asse neutro vanno intese dal baricentro della sezione.

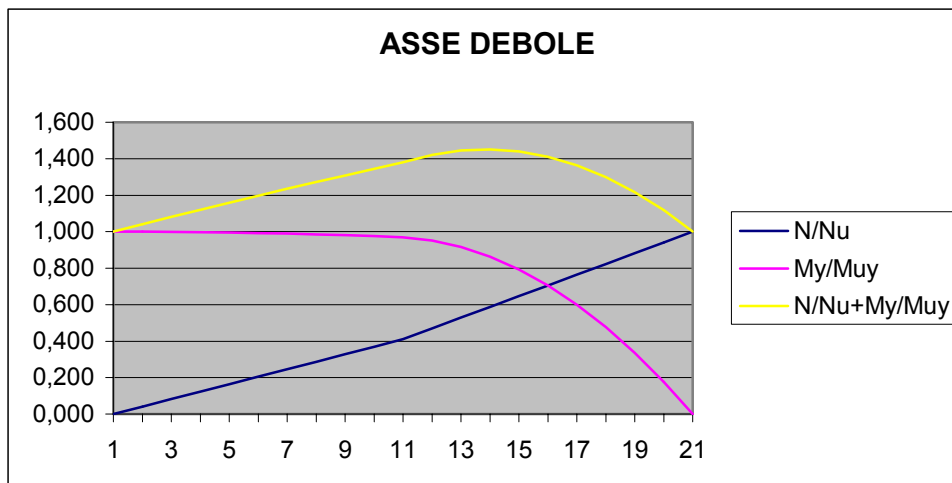
DOMINIO DI RESISTENZA A TENSO-PRESSO FLESSIONE RETTA						
SEZIONE A DOPPIO T -ASSE FORTE-						
B=	150	mm	$\sigma_s=1$	SEZ. IPE 300		
H=	300	mm	A=	5188,06		
s=	10,7	mm	Nu=	5188,06		
t=	7,1	mm	Mux=	602098,4		
Posizione	y=	N	Mx	N/Nu	Mx/Mux	N/Nu+Mx/Mux
0	0	0	602098,4	0,000	1,000	1,000
1	13,93	197,806	600720,7	0,038	0,998	1,036
2	27,86	395,612	596587,5	0,076	0,991	1,067
3	41,79	593,418	589698,9	0,114	0,979	1,094
4	55,72	791,224	580054,9	0,153	0,963	1,116
5	69,65	989,03	567655,4	0,191	0,943	1,133
6	83,58	1186,836	552500,5	0,229	0,918	1,146
7	97,51	1384,642	534590,2	0,267	0,888	1,155
8	111,44	1582,448	513924,4	0,305	0,854	1,159
9	125,37	1780,254	490503,2	0,343	0,815	1,158
10	139,3	1978,06	464326,5	0,381	0,771	1,152
11	140,37	2299,06	419439,5	0,443	0,697	1,140
12	141,44	2620,06	374209	0,505	0,622	1,127
13	142,51	2941,06	328635	0,567	0,546	1,113
14	143,58	3262,06	282717,5	0,629	0,470	1,098
15	144,65	3583,06	236456,6	0,691	0,393	1,083
16	145,72	3904,06	189852,2	0,753	0,315	1,068
17	146,79	4225,06	142904,4	0,814	0,237	1,052
18	147,86	4546,06	95613,06	0,876	0,159	1,035
19	148,93	4867,06	47978,26	0,938	0,080	1,018
20	150	5188,06	0	1,000	0,000	1,000



Si nota che fintanto che l'asse neutro taglia l'anima, la capacità di resistenza a flessione della sezione si riduce lentamente anche a fronte di un discreto sforzo Normale. In corrispondenza di uno sforzo Normale pari a circa il 30% dello sforzo Normale ultimo, si registra una capacità di assorbire un Momento flettente pari ancora all'85% di quello ultimo. La somma degli indici di resistenza raggiunge in tale zona il valore di circa 1,15 – 1,16. Quando l'asse neutro raggiunge

l'ala, la capacità di resistenza a flessione decresce più rapidamente in modo quasi lineare così come cresce la capacità di resistenza a sforzo Normale.

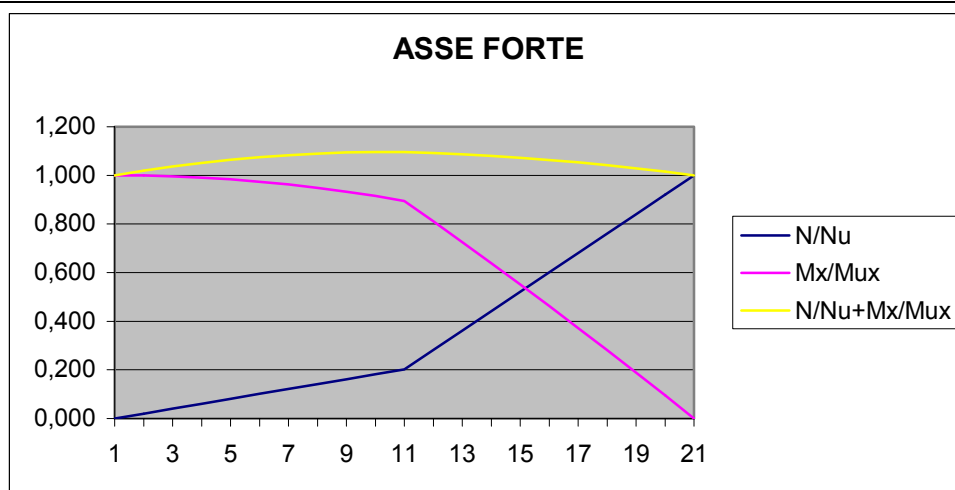
DOMINIO DI RESISTENZA A TENSO-PRESSO FLESSIONE RETTA SEZIONE A DOPPIO T -ASSE DEBOLE-						
B=	150	mm	$\sigma_s=1$	SEZ. IPE 300		
H=	300	mm	A=	5188,06		
s=	10,7	mm	Nu=	5188,06		
t=	7,1	mm	Muy=	123886,1		
Posizione	y=	N	My	N/Nu	My/Muy	N/Nu+My/Muy
0	0	0	123886,1	0,000	1,000	1,000
1	0,355	213	123848,2	0,041	1,000	1,041
2	0,71	426	123734,8	0,082	0,999	1,081
3	1,065	639	123545,8	0,123	0,997	1,120
4	1,42	852	123281,1	0,164	0,995	1,159
5	1,775	1065	122940,9	0,205	0,992	1,198
6	2,13	1278	122525	0,246	0,989	1,235
7	2,485	1491	122033,5	0,287	0,985	1,272
8	2,84	1704	121466,4	0,328	0,980	1,309
9	3,195	1917	120823,6	0,370	0,975	1,345
10	3,55	2130	120105,3	0,411	0,969	1,380
11	10,695	2435,806	117927,2	0,470	0,952	1,421
12	17,84	2741,612	113564,1	0,528	0,917	1,445
13	24,985	3047,418	107016	0,587	0,864	1,451
14	32,13	3353,224	98282,99	0,646	0,793	1,440
15	39,275	3659,03	87364,95	0,705	0,705	1,410
16	46,42	3964,836	74261,93	0,764	0,599	1,364
17	53,565	4270,642	58973,92	0,823	0,476	1,299
18	60,71	4576,448	41500,93	0,882	0,335	1,217
19	67,855	4882,254	21842,96	0,941	0,176	1,117
20	75	5188,06	0	1,000	0,000	1,000



Se il momento agisce nella direzione dell'asse debole (M_y), si evidenzia che se l'asse neutro rimane entro l'anima, la sezione gode di una buona capacità di assorbire lo sforzo Normale senza apprezzabile decadimento della capacità di resistenza a flessione. In corrispondenza di uno sforzo Normale pari a circa il 47% di quello ultimo si registra una capacità di resistere ad un momento flettente pari a circa il 95% di quello ultimo. La somma degli indici di resistenza in tale punto

raggiunge il valore di 1,42 e fa registrare un massimo di 1,45. Le performance degli indici sono comunque molto influenzati dalle dimensioni geometriche della sezione.

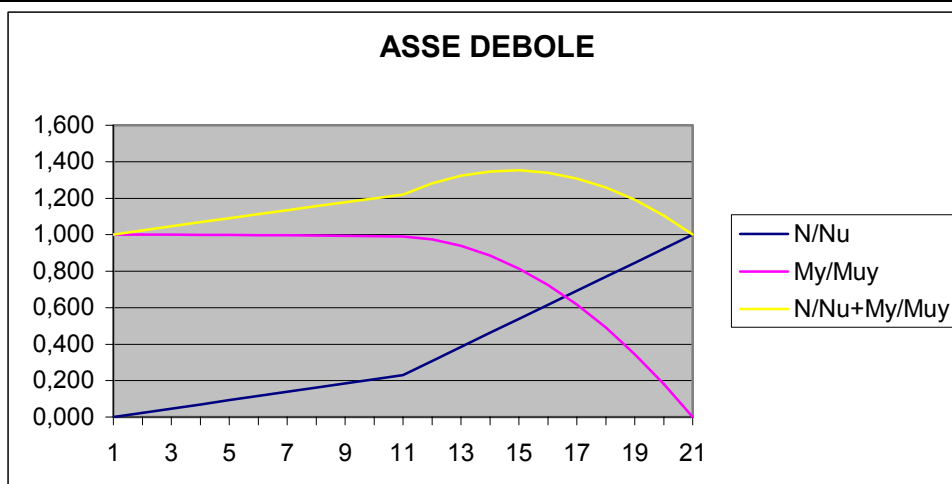
DOMINIO DI RESISTENZA A TENSO-PRESSO FLESSIONE RETTA						
SEZIONE A DOPPIO T -ASSE FORTE-						
B=	300	mm	$\sigma_s=1$	SEZ. HE B 300		
H=	300	mm	A=	14282		
s=	19	mm	Nu=	14282		
t=	11	mm	Mux=	1790471		
Posizione	y=	N	Mx	N/Nu	Mx/Mux	N/Nu+Mx/Mux
0	0	0	1790471	0,000	1,000	1,000
1	13,1	288,2	1788583	0,020	0,999	1,019
2	26,2	576,4	1782920	0,040	0,996	1,036
3	39,3	864,6	1773482	0,061	0,991	1,051
4	52,4	1152,8	1760268	0,081	0,983	1,064
5	65,5	1441	1743278	0,101	0,974	1,075
6	78,6	1729,2	1722513	0,121	0,962	1,083
7	91,7	2017,4	1697973	0,141	0,948	1,090
8	104,8	2305,6	1669658	0,161	0,933	1,094
9	117,9	2593,8	1637566	0,182	0,915	1,096
10	131	2882	1601700	0,202	0,895	1,096
11	132,9	4022	1451277	0,282	0,811	1,092
12	134,8	5162	1298688	0,361	0,725	1,087
13	136,7	6302	1143933	0,441	0,639	1,080
14	138,6	7442	987012	0,521	0,551	1,072
15	140,5	8582	827925	0,601	0,462	1,063
16	142,4	9722	666672	0,681	0,372	1,053
17	144,3	10862	503253	0,761	0,281	1,042
18	146,2	12002	337668	0,840	0,189	1,029
19	148,1	13142	169917	0,920	0,095	1,015
20	150	14282	0	1,000	0,000	1,000



La sezione tipo HE B 300 mette in maggiore evidenza rispetto alla sezione tipo IPE la differenza di andamento dei grafici tra la zona nella quale l'asse neutro taglia l'anima e la zona in cui l'asse neutro tagli le ali. Fin tanto che l'asse neutro rimane nell'anima la sezione sviluppa una certa capacità di resistenza a sforzo Normale a discapito di una piccola quota di resistenza alla componente flessionale anche se tale comportamento si registra in misura minore rispetto alla sezione tipo IPE a causa della maggiore incidenza dell'area d'anima. La somma degli indici di

resistenza raggiunge un valore massimo all'incirca pari a 1,10, contro l'1,15 della sezione IPE di pari altezza.

DOMINIO DI RESISTENZA A TENSO-PRESSO FLESSIONE RETTA SEZIONE A DOPPIO T -ASSE DEBOLE-						
B=	300	mm	$\sigma_s=1$	SEZ. HE B 300		
H=	300	mm	A=	14282		
s=	19	mm	Nu=	14282		
t=	11	mm	Muy=	862925,5		
Posizione	y=	N	My	N/Nu	My/Muy	N/Nu+My/Muy
0	0	0	862925,5	0,000	1,000	1,000
1	0,55	330	862834,8	0,023	1,000	1,023
2	1,1	660	862562,5	0,046	1,000	1,046
3	1,65	990	862108,8	0,069	0,999	1,068
4	2,2	1320	861473,5	0,092	0,998	1,091
5	2,75	1650	860656,8	0,116	0,997	1,113
6	3,3	1980	859658,5	0,139	0,996	1,135
7	3,85	2310	858478,8	0,162	0,995	1,157
8	4,4	2640	857117,5	0,185	0,993	1,178
9	4,95	2970	855574,8	0,208	0,991	1,199
10	5,5	3300	853850,5	0,231	0,989	1,221
11	19,95	4398,2	839875,9	0,308	0,973	1,281
12	34,4	5496,4	810032,3	0,385	0,939	1,324
13	48,85	6594,6	764319,7	0,462	0,886	1,347
14	63,3	7692,8	702738,2	0,539	0,814	1,353
15	77,75	8791	625287,6	0,616	0,725	1,340
16	92,2	9889,2	531968,1	0,692	0,616	1,309
17	106,65	10987,4	422779,5	0,769	0,490	1,259
18	121,1	12085,6	297722	0,846	0,345	1,191
19	135,55	13183,8	156795,5	0,923	0,182	1,105
20	150	14282	0	1,000	0,000	1,000



Anche per momenti flettenti agenti lungo l'asse debole (M_y) si evidenzia la notevole differenza di comportamento nella zona di grafico in cui l'asse neutro taglia l'anima rispetto a quella in cui l'asse neutro taglia le ali. Con l'asse neutro al limite dell'anima si riesce a sviluppare uno sforzo Normale pari al 23% contro una riduzione di resistenza a flessione pari a 2% rispetto alla resistenza a flessione retta. Si conferma così il buon comportamento di questi tipi di profili per sollecitazioni di tenso presso flessione. La somma degli indici di resistenza raggiunge il valore di circa 1,22 in

corrispondenza della posizione dell'asse neutro al limite dell'anima per crescere ancora fino al valore di 1,35 circa. Il valore della somma degli indici risulta però inferiore a quella che si è registrata per la sezione tipo IPE di pari altezza.

Da quanto appena analizzato si può concludere che per sollecitazioni di tenso-presso flessione in cui la componente assiale è contenuta entro il 10-15% dello sforzo Normale ultimo della sezione, si può procedere ad una verifica a flessione retta trascurando la presenza dello sforzo Normale. Laddove la componente assiale non è trascurabile, si riscontra la necessità di determinare i domini di resistenza della sezione da verificare o in alternativa, operando senz'altro a vantaggio di statica, si può utilizzare un dominio adimensionalizzato in cui la somma degli indici di resistenza risulta uguale a 1. In definitiva in maniera semplice e a vantaggio di statica, un sezione soggetta a tenso-presso flessione risulta verificata se sussiste la seguente disuguaglianza.

$$\frac{N}{N_u} + \frac{M}{M_u} \leq 1$$

La relazione, espressa in termini di valore assoluto, vale ovviamente se il materiale resiste in modo uguale a trazione e a compressione.

Facciamo qualche esempio numerico.

Una sezione di acciaio Fe 360, tipo HE 200 B, è sollecitata da uno sforzo Normale pari a 700 KN e da un momento flettente intorno all'asse forte pari a 80 KNm. Facendo ricorso alla resistenza in fase plastica e adottando un coefficiente di sicurezza del materiale pari a 1,05, si effettui la verifica di resistenza della sezione data.

Dal sagomario si ricavano i valori dell'area della sezione e del modulo di resistenza plastica W_{plx} .

$$\begin{aligned} \text{HE 200 B} \quad A &= 78,08 \text{ cm}^2 = 7808 \text{ mm}^2 \\ W_{plx} &= 642,5 \text{ cm}^3 = 642,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

L'acciaio tipo Fe 360 possiede una tensione di snervamento caratteristica pari a $f_y = 235 \text{ MPa}$. Assumendo per il coefficiente di sicurezza del materiale il valore 1,05, la tensione di calcolo diventa:

$$\sigma_d = \frac{f_y}{\gamma_m} = \frac{235}{1,05} = 223,8 \text{ MPa}$$

Per effettuare la verifica calcoliamo i valori di N_u e M_{ux} nelle condizioni di sollecitazione semplice. Si ha:

$$\begin{aligned} N_u &= A \cdot \sigma_d = 7808 \cdot 223,8 = 1747430 \text{ N} = 1747,43 \text{ KN} \\ M_{ux} &= W_{plx} \cdot \sigma_d = 642,5 \cdot 10^3 \cdot 223,8 = 143,79 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 143,79 \text{ KNm} \end{aligned}$$

Effettuiamo la verifica facendo riferimento al dominio di resistenza a tenso flessione semplificato.

$$\frac{N_d}{N_u} + \frac{M_{dx}}{M_{ux}} = \frac{700}{1747,43} + \frac{80}{143,79} = 0,96 < 1 \quad \text{la verifica è soddisfatta.}$$

Esempio di progetto di una sezione tenso inflessa in acciaio.

Si vuole progettare una sezione in acciaio tipo HE B in grado di resistere alla seguente sollecitazione di progetto: $N_d = 400KN$ $M_{dx} = 200KNn$

Poiché non esiste una formula di progetto per la sollecitazione composta di sforzo Normale e flessione retta, si dovrà procedere per tentativi.

Come primo passo si calcolerà l'area e il modulo di resistenza plastico della sezione nelle ipotesi di sollecitazione semplice di solo sforzo Normale e di sola flessione retta.

Come materiale adottiamo lo stesso dell'esercizio precedente, Fe 360 con una tensione di progetto pari a $\sigma_d = 223,8MPa$ ottenuta con un coefficiente di sicurezza pari a 1,05.

$$A = \frac{N_d}{\sigma_d} = \frac{400 \cdot 10^3}{223,8} = 1787mm^2 = 17,87cm^2$$

$$W_{plx} = \frac{M_{dx}}{\sigma_d} = \frac{200 \cdot 10^6}{223,8} = 893655mm^3 = 893,655cm^3$$

Dal sagomario ricavo che la prima sezione utile che risponde ad entrambi i requisiti è la HE 240 B, per la quale si hanno i seguenti valori:

$$A = 106cm^2 \quad W_{plx} = 1053cm^3$$

Visto che l'area posseduta dalla sezione è molto maggiore di quella prima calcolata e che c'è un certo margine anche sul modulo di resistenza plastica, si procede alla verifica della sezione.

$$N_u = A \cdot \sigma_d = 106 \cdot 10^2 \cdot 223,8 = 2372280N = 2372,28KN$$

$$M_{ux} = W_{plx} \cdot \sigma_d = 1053 \cdot 10^3 \cdot 223,8 = 235661400Nmm = 235,66KNm$$

$$\frac{N_d}{N_u} + \frac{M_{dx}}{M_{ux}} = \frac{400}{2372,28} + \frac{200}{235,66} = 1,02 > 1$$

Con riferimento al dominio di resistenza semplificato, la sezione, anche se per poco, non risulta verificata. Si procede quindi a prendere in considerazione una sezione di poco maggiore di quella appena analizzata.

SI adotta una sezione HE 260 B, per la quale si hanno i seguenti valori:

$$A = 118,4cm^2 \quad W_{plx} = 1283cm^3$$

Procediamo con la verifica

$$N_u = A \cdot \sigma_d = 118,4 \cdot 10^2 \cdot 223,8 = 2649792N = 2649,792KN$$

$$M_{ux} = W_{plx} \cdot \sigma_d = 1283 \cdot 10^3 \cdot 223,8 = 287135400Nmm = 287,135KNm$$

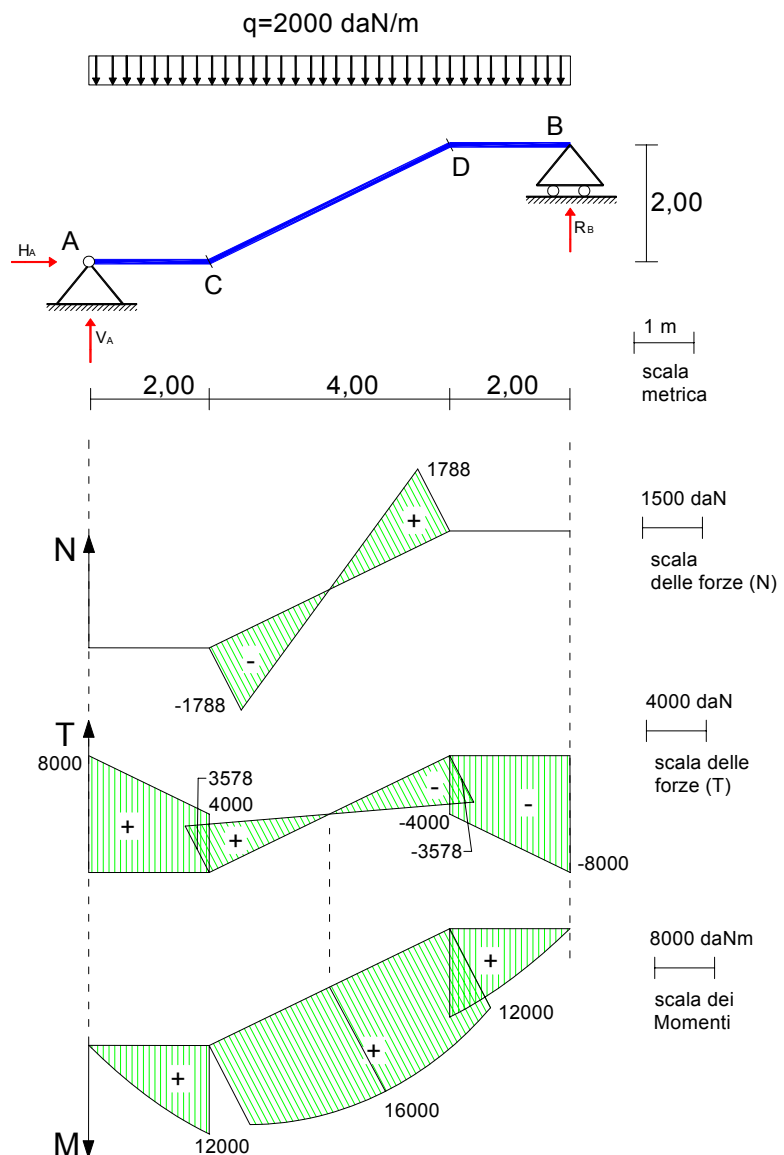
$$\frac{N_d}{N_u} + \frac{M_{dx}}{M_{ux}} = \frac{400}{2649,792} + \frac{200}{287,135} = 0,85 < 1$$

La sezione è verificata.

Esempi applicativi

- 1) Attraverso il metodo delle tensioni ammissibili si progetta la sezione rettangolare, in legno massiccio di seconda categoria idonea a realizzare la trave riportata in figura.

La struttura risulta già risolta e dai diagrammi si ricava che la sezione più sollecitata a flessione è la sezione di mezzeria della trave dove agisce un Momento flettente pari a 16000 daNm. In tale sezione la sollecitazione è di flessione retta, mentre nella sezione **C**, il momento flettente è pari a 12000 daNm e agisce in contemporanea ad uno sforzo di compressione pari a 1788 daN. Nella sezione **D** il momento assume lo stesso valore che assume in **C**, ma lo sforzo Normale, seppure di pari valore a quanto si verifica in **C**, risulta di trazione. La sezione da progettare, dovrà quindi essere idonea a resistere ad una sollecitazione di flessione retta con momento pari a 16000 daNm ed anche ad una sollecitazione di tenso e presso flessione con i valori di **M** e di **N** che si registrano nelle sezioni **C** e **D**.



Fase di progetto

Per il legno massiccio di 2° categoria si può assumere una tensione ammissibile pari a $\sigma_a = 10 \text{ MPa}$

Si procede al progetto della sezione considerando la sollecitazione massima a flessione retta, e poi successivamente si effettueranno le verifiche tenendo conto anche delle sollecitazioni che agiscono nelle sezioni **C** e **D**.

Ponendo come condizione di progetto che $B = \frac{5}{7} \cdot H$ la formula che ci fornisce il modulo di resistenza elastico di progetto e quindi le dimensioni della sezione rettangolare sono:

$$W_x = \frac{M_x}{\sigma_a} = \frac{160 \cdot 10^6}{10} = 16 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$H = \sqrt[3]{\frac{42 \cdot W_x}{5}} = \sqrt[3]{\frac{42 \cdot 16 \cdot 10^6}{5}} = 512 \text{ mm} \Rightarrow 520 \text{ mm}$$

$$B = \frac{5}{7} \cdot H = \frac{5}{7} \cdot 520 = 372 \text{ mm} \Rightarrow 380 \text{ mm}$$

Il modulo di resistenza elastico effettivo della sezione adottata è:

$$W_x = \frac{B \cdot H^2}{6} = \frac{380 \cdot 520^2}{6} = 17125 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Mentre l'area della sezione è: $A = B \cdot H = 380 \cdot 520 = 1976 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$

Fase di verifica.

Sezione di mezzaria della trave: sollecitazione di flessione retta.

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{160 \cdot 10^6}{17125 \cdot 10^3} = 9,34 \text{ MPa} < \sigma_a. \quad \text{La sezione è verificata}$$

Sezione **C** e **D**. Verifica a tenso flessione.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} = \frac{17880}{1976 \cdot 10^2} + \frac{120 \cdot 10^6}{17125 \cdot 10^3} = 7,10 \text{ MPa} < \sigma_a$$

Anche nelle sezioni **C** e **D** la verifica è soddisfatta.

- 2) Attraverso il metodo agli S.L.U. si progetti la sezione in acciaio Fe 360, tipo IPE, idonea per la realizzazione della trave riportata in figura caricata da 3 Forze verticali di cui la componente permanente è pari a 5,4 KN e la componente variabile è pari a 10,8 KN.

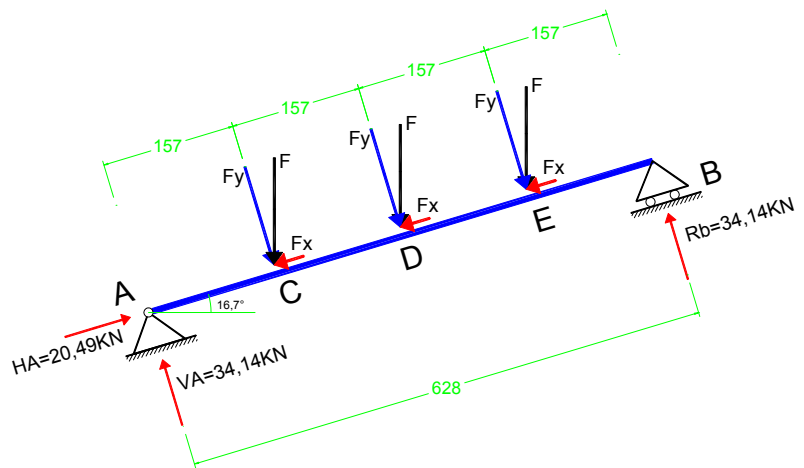
Per il metodo allo Stato limite ultimo, i carichi vanno combinati secondo la seguente espressione convenzionale.

$$1,4 \cdot G + 1,5 \cdot Q$$

Nel caso specifico si ha:

$$F = 1,4 \cdot 5,4 + 1,5 \cdot 10,8 = 23,76 \text{ KN}$$

Ogni singola forza va ora scomposta secondo la direzione parallela all'asse della trave e secondo la direzione perpendicolare all'asse della trave.



$$F_x = F \cdot \sin 16,7 = 23,76 \cdot \sin 16,7 = 6,83 \text{ KN}$$

$$F_y = F \cdot \cos 16,7 = 23,76 \cdot \cos 16,7 = 22,76 \text{ KN}$$

Le reazioni vincolari sono

$$H_A = 3 \cdot F_x = 3 \cdot 6,83 = 20,49 \text{ KN}$$

facilmente ricavabili nel modo seguente:

$$V_A = R_B = \frac{3 \cdot F_y}{2} = \frac{3 \cdot 22,76}{2} = 34,14 \text{ KN}$$

Data la semplicità dello schema strutturale si omette di determinare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione, calcolando direttamente la combinazione di sollecitazione più gravosa ai fini delle verifiche di resistenza della trave.

Il momento massimo nella trave si verifica nella sezione D, ed è pari a:

$$M_d = V_A \cdot 2 \cdot 1,57 - F_y \cdot 1,57 = 34,14 \cdot 2 \cdot 1,57 - 22,76 \cdot 1,57 = 71,466 \text{ KNm}$$

Nella sezione **D**, oltre al momento flettente è presente anche lo sforzo Normale. Viene determinato lo sforzo Normale che si verifica a sinistra di **D** in quanto maggiore in valore assoluto di quello a destra di **D**. Lo sforzo Normale è di compressione ed è pari a:

$$N_d = -H_A + F_x = -20,49 + 6,83 = -13,66 \text{ KN}$$

Nelle verifiche adotteremo il valore assoluto dello sforzo Normale.

Trattandosi di una trave si ipotizza che il momento flettente sia predominante rispetto allo sforzo Normale in relazione alle verifiche di resistenza e quindi si procede in prima istanza ad un dimensionamento a flessione della sezione resistente.

La tensione di progetto si determina applicando alla tensione di snervamento caratteristica il coefficiente di sicurezza del materiale:

$$\sigma_d = \frac{f_y}{\gamma_m} = \frac{235}{1,05} = 223,8 \text{ MPa}$$

Il modulo di resistenza plastica della sezione di progetto è:

$$W_{plx} = \frac{M_d}{\sigma_d} = \frac{71,466 \cdot 10^6}{223,8} = 319,330 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 319,33 \text{ cm}^3$$

Dal sagomario si ricava la sezione IPE 240 la quale presenta le seguenti caratteristiche meccaniche: $A = 39,12 \text{ cm}^2$; $W_{plx} = 366,6 \text{ cm}^3$

Con i dati effettivi della sezione si procede alla determinazione di N_u e di M_{ux} e si confrontano poi le sollecitazioni di progetto con il dominio di resistenza a presso flessione semplificato e adimensionalizzato.

$$N_u = A \cdot \sigma_d = 3912 \cdot 223,8 = 875506 \text{ N} = 875,506 \text{ KN}$$

$$M_{ux} = W_{plx} \cdot \sigma_d = 366,6 \cdot 10^3 \cdot 223,8 = 82,045 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 82,045 \text{ KNm}$$

$$\frac{N_d}{N_u} + \frac{M_d}{M_{ux}} = \frac{13,66}{875,506} + \frac{71,466}{82,045} = 0,89 < 1$$

La sezione è verificata.

La sollecitazione di Tenso (Presso) Flessione deviata

Si ha la sollecitazione composta di tenso (presso) flessione deviata quando la sezione può considerarsi sollecitata da uno sforzo Normale che presenta un'eccentricità rispetto ad entrambi gli assi principali della sezione. La condizione è quella rappresentata a titolo di esempio in figura. Il campo tensionale nella sezione può essere determinato sommando gli effetti sulle tensioni dello sforzo Normale e della flessione deviata ottenendo la seguente espressione:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x$$

che utilizzando i moduli di resistenza elastici comprensivi del segno algebrico, può essere scritta anche come:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$

Tenendo conto che con N positiva e con le eccentricità e_x ed e_y positive si ottiene un Momento M_x negativo ed Momento M_y positivo, si ha:

$$M_x = -N \cdot e_x$$

$$M_y = N \cdot e_y$$

e quindi si può scrivere:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_x}{J_x} \cdot y + \frac{N \cdot e_y}{J_y} \cdot x$$

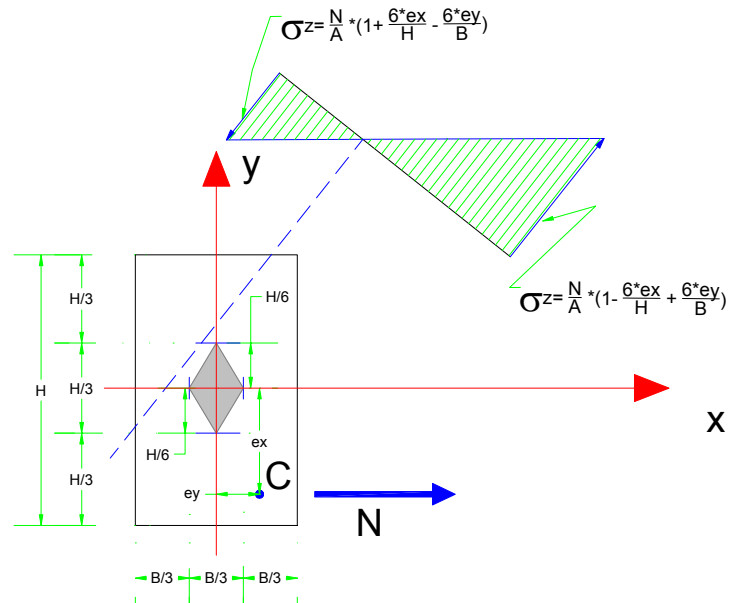
ed ancora:

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{e_x}{i_x^2} \cdot y + \frac{e_y}{i_y^2} \cdot x \right)$$

L'equazione dell'asse neutro si ottiene eguagliando a zero la tensione σ .

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{e_x}{i_x^2} \cdot y + \frac{e_y}{i_y^2} \cdot x \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{e_x}{i_x^2} \cdot y + \frac{e_y}{i_y^2} \cdot x = 0$$

L'equazione dell'asse neutro rappresenta una retta che presenta le seguenti intersezioni con gli assi principali:



$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{i_x^2}{e_x}$$

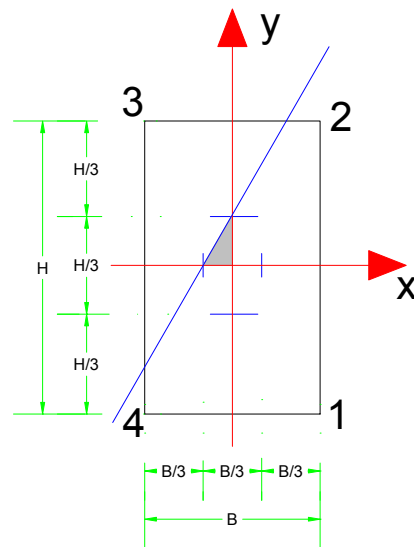
$$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{i_y^2}{e_y}$$

Le intersezioni con gli assi principali corrispondono singolarmente alle posizioni dell'asse neutro nella sollecitazione di tenso (presso) flessione retta corrispondente.

Ricordando le definizioni di centro relativo ad una retta e le formule che determinano la posizione di tale centro, si riconosce che il centro di sollecitazione rappresenta il centro relativo all'asse neutro, ed inoltre l'asse di sollecitazione e l'asse neutro sono assi coniugati.

Per quanto detto si può affermare che se il centro di sollecitazione è esterno al nocciolo di inerzia, l'asse neutro taglierà la sezione, mentre se il centro di sollecitazione risulta interno al nocciolo di inerzia l'asse neutro è completamente esterno alla sezione.

A riprova di quanto affermato se nella formula delle tensioni inseriamo le coordinate dei vertici della sezione e poniamo uguale a zero la tensione, otteniamo proprio le equazioni dei lati del nocciolo d'inerzia.



$$\sigma_1 = 0$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{e_x}{i_x^2} \cdot y + \frac{e_y}{i_y^2} \cdot x \right) = 0$$

$$1 + \frac{e_x}{\frac{H^2}{12}} \cdot \left(-\frac{H}{2} \right) + \frac{e_y}{\frac{B^2}{12}} \cdot \left(\frac{B}{2} \right) = 0$$

$$1 - \frac{6 \cdot e_x}{H} + \frac{6 \cdot e_y}{B} = 0$$

$$e_y = -\frac{B}{6} + e_x \cdot \frac{B}{H}$$

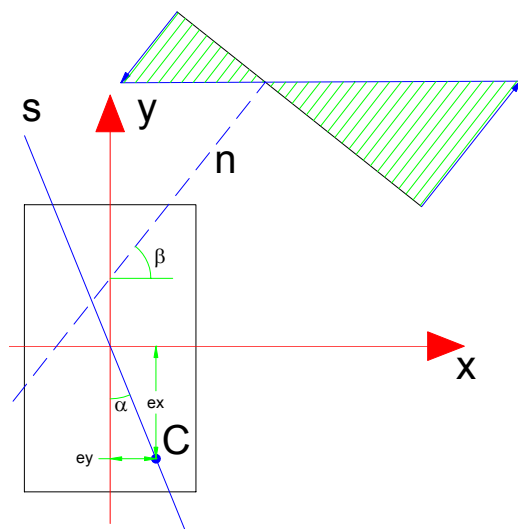
La retta ottenuta interseca gli assi **x** e **y** nei seguenti punti:

$$e_y = 0 \Rightarrow e_x = \frac{H}{6}$$

$$e_x = 0 \Rightarrow e_y = -\frac{B}{6}$$

la retta è rappresentata in figura e individua proprio una porzione del nocciolo d'inerzia. Operando nello stesso modo con le coordinate degli altri vertici si ottengono le altre rette che forniscono gli altri tre lati del nocciolo d'inerzia.

Per quanto attiene all'angolo β che l'asse neutro forma con l'asse delle **x**, rimane ancora valida la formula trovata nel caso della flessione deviata, infatti si ha:



$$1 + \frac{e_x}{i_x^2} \cdot y + \frac{e_y}{i_y^2} \cdot x = 0 \Rightarrow y = -\frac{i_x^2}{e_x} + \frac{e_y \cdot i_x^2}{e_x \cdot i_y^2} \cdot x \quad \text{e cioè:}$$

$$y = -\frac{i_x^2}{e_x} + \left(\frac{i_x^2}{i_y^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right) \cdot x \quad \text{e quindi:} \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{i_x^2}{i_y^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right)$$

Progetto e verifica di sezioni soggette a tenso (presso) flessione deviata (M.T.A.).

Così come per la tenso (presso) flessione retta anche nel caso in cui l'azione dello sforzo Normale è combinata con la flessione che agisce intorno ad entrambi gli assi principali della sezione, non è possibile ricavare formule chiuse di progetto, ma occorre procedere per tentativi cercando di intuire quale delle due componenti di sollecitazione, assiale o flessionale, prevalga in termini di tensioni rispetto all'altra. Se la sollecitazione prevalente è quella flessionale, si potrà procedere ad assegnare una prima sezione di tentativo considerando la sezione soggetta a flessione deviata ed utilizzando quindi la relativa formula di progetto.

$$W_x = \frac{1}{\sigma_a} \cdot (M_x + K \cdot M_y) \quad \text{dove} \quad K = \frac{W_x}{W_y}$$

Successivamente si procederà alla verifica della sezione tenendo conto della reale sollecitazione agente.

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x \quad \text{oppure} \quad \sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$

Se la verifica risulterà soddisfatta il progetto è terminato, in caso contrario si procede incrementando le dimensioni della sezione e procedendo ad una nuova verifica. Il processo iterativo di progetto finisce quando si è determinata la sezione che soddisfa le condizioni di verifica.

Se invece, come più spesso accade, la sollecitazione prevalente è rappresentata dallo sforzo Normale, il progetto può avvenire assegnando come primo tentativo la sezione ricavata attraverso l'utilizzo della formula di progetto valida per la sollecitazione di sforzo Normale centrato.

$$A = \frac{N}{\sigma_a}$$

Determinata l'area della sezione si procede alla scelta della forma e delle dimensioni a seconda che la componente flessionale intorno all'asse **x** sia maggiore, minore o uguale a quella intorno all'asse **y**. Se le due componenti flessionali sono dello stesso ordine di grandezza, si opterà per una sezione pressappoco quadrata, mentre se una prevale sull'altra, la sezione assumerà una forma allungata nella direzione della maggiore sollecitazione flessionale. Assegnata la prima sezione di tentativo si procede come nel caso precedente alle operazioni di verifica ed all'eventuale iterazione del procedimento di progetto intervenendo sulle dimensioni geometriche della sezione.

Facciamo un esempio numerico

Si vuole progettare la sezione di un pilastrino in legno soggetto alle seguenti sollecitazioni: Sforzo Normale di compressione $N=-300\text{KN}$; $M_x=+13\text{KNm}$; $M_y=-9\text{KNm}$.
Si assuma nel progetto una tensione ammissibile pari a 10MPa .

Come primo passo di progetto, determiniamo le caratteristiche meccaniche che la sezione dovrebbe possedere nelle ipotesi di sollecitazione semplice.

$$A = \frac{N}{\sigma_a} = \frac{300 \cdot 10^3}{10} = 300 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 = 300 \text{ cm}^2$$

$$W_x = \frac{M_x}{\sigma_a} = \frac{13 \cdot 10^6}{10} = 1300 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 1300 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{M_y}{\sigma_a} = \frac{9 \cdot 10^6}{10} = 900 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 900 \text{ cm}^3$$

Ognuna delle caratteristiche appena determinate rappresenta il minimo necessario nell'ipotesi di sollecitazione semplice. Considerando che le sollecitazioni agiscono tutte contemporaneamente, si dovrà adottare una sezione che abbia caratteristiche meccaniche sufficientemente maggiori di quelle appena determinate.

Come prima ipotesi di progetto si considera una sezione rettangolare avente le dimensioni dei lati in centimetri pari a 18×30 .

Le caratteristiche meccaniche della sezione ipotizzata sono:

$$A = B \cdot H = 18 \cdot 30 = 540 \text{ cm}^2 = 540 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$W_x = \frac{B \cdot H^2}{6} = \frac{18 \cdot 30^2}{6} = 2700 \text{ cm}^3 = 2700 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$W_y = \frac{H \cdot B^2}{6} = \frac{30 \cdot 18^2}{6} = 1620 \text{ cm}^3 = 1620 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Effettuiamo la verifica determinando solo la tensione massima in valore assoluto.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{300 \cdot 10^3}{540 \cdot 10^2} + \frac{13 \cdot 10^6}{2700 \cdot 10^3} + \frac{9 \cdot 10^6}{1620 \cdot 10^3} = 15,92 \text{ MPa} > \sigma_a$$

La sezione non è verificata. Si procede quindi aumentando le dimensioni della sezione. Si adotta come secondo tentativo la sezione rettangolare di dimensioni 24×32 .

Le caratteristiche meccaniche della sezione sono:

$$A = B \cdot H = 24 \cdot 32 = 768 \text{ cm}^2 = 768 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$W_x = \frac{B \cdot H^2}{6} = \frac{24 \cdot 32^2}{6} = 4096 \text{ cm}^3 = 4096 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$W_y = \frac{H \cdot B^2}{6} = \frac{32 \cdot 24^2}{6} = 3072 \text{ cm}^3 = 3072 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Effettuiamo la verifica

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{300 \cdot 10^3}{768 \cdot 10^2} + \frac{13 \cdot 10^6}{4096 \cdot 10^3} + \frac{9 \cdot 10^6}{3072 \cdot 10^3} = 10 \text{MPa} = \sigma_a$$

La sezione è verificata.

Determiniamo ora l'asse neutro ed il campo tensionale completo.

Le caratteristiche di inerzia della sezione sono:

$$J_x = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{24 \cdot 32^3}{12} = 65536 \text{cm}^4; \quad i_x^2 = \frac{H^2}{12} = \frac{32^2}{12} = 85,333 \text{cm}^2$$

$$J_y = \frac{H \cdot B^3}{12} = \frac{32 \cdot 24^3}{12} = 36864 \text{cm}^4; \quad i_y^2 = \frac{B^2}{12} = \frac{24^2}{12} = 48 \text{cm}^2$$

Le eccentricità del centro di sollecitazione valgono:

$$e_x = -\frac{M_x}{N} = -\frac{13 \cdot 10^2 \text{KNcm}}{-300 \text{KN}} = 4,333 \text{cm}; \quad e_y = \frac{M_y}{N} = \frac{-9 \cdot 10^2 \text{KNcm}}{-300 \text{KN}} = 3 \text{cm}$$

Per tracciare l'asse neutro determiniamo le intersezioni con gli assi principali d'inerzia.

L'asse neutro interseca l'asse **x** alla coordinata: $y_n = -\frac{i_x^2}{e_x} - \frac{85,333}{4,33} = -19,694 \text{cm}$

L'asse neutro interseca l'asse **y** alla coordinata: $x_n = -\frac{i_y^2}{e_y} - \frac{48}{3} = -16 \text{cm}$

Come si può notare, l'asse neutro taglia la sezione, infatti il centro di sollecitazione, come può facilmente verificarsi, risulta esterno al nocciolo di inerzia.

Se vogliamo calcolare anche gli angoli α e β si procede nel modo che segue:

$$\text{tg} \alpha = \frac{e_y}{e_x} = \frac{3}{4,333}; \quad \alpha = \text{arctg} \frac{3}{4,333} = 34,70^\circ$$

$$\beta = \text{arctg} \left(\frac{i_x^2}{i_y^2} \cdot \text{tg} \alpha \right) = \text{arctg} \left(\frac{85,333}{48} \cdot \frac{3}{4,333} \right) = 50,91^\circ$$

Il campo tensionale nella sezione sarà fornito dalla formula di validità generale per la sollecitazione di tenso (presso) flessione.

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x$$

In particolare ricaveremo le tensioni che si verificano ai quattro vertici della sezione per i quali si hanno le seguenti coordinate cartesiane espresse in cm:

$$\text{punto 1 (12;16)} \quad \text{punto 2 (-12;16)} \quad \text{punto 3 (-12;-16)} \quad \text{punto 4 (12;-16)}$$

Trasformando i valori nelle consuete unità di misura (N e mm), si hanno ai vertici le seguenti tensioni.

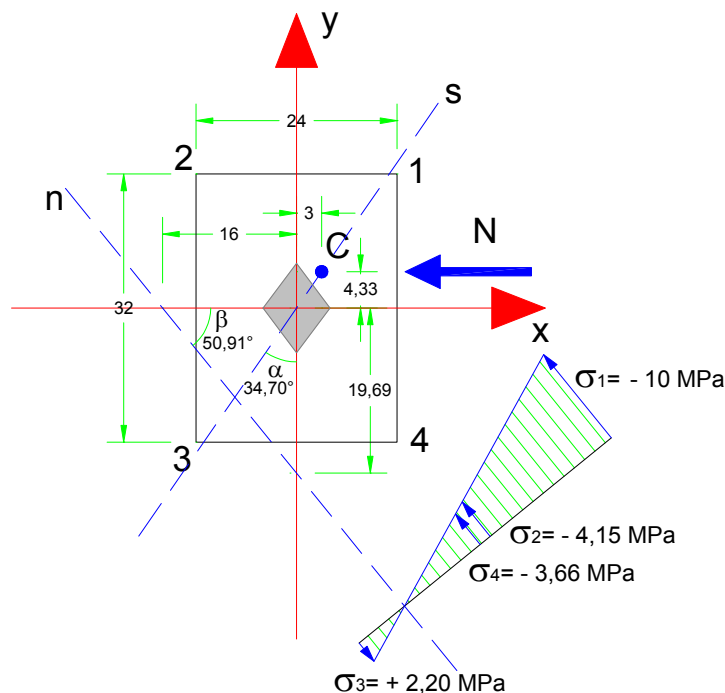
$$\sigma_1 = \frac{-300 \cdot 10^3}{768 \cdot 10^2} - \frac{13 \cdot 10^6}{65536 \cdot 10^4} \cdot (+160) + \frac{-9 \cdot 10^6}{36864 \cdot 10^4} \cdot (+120) = -10,00 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{-300 \cdot 10^3}{768 \cdot 10^2} - \frac{13 \cdot 10^6}{65536 \cdot 10^4} \cdot (+160) + \frac{-9 \cdot 10^6}{36864 \cdot 10^4} \cdot (-120) = -4,15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{-300 \cdot 10^3}{768 \cdot 10^2} - \frac{13 \cdot 10^6}{65536 \cdot 10^4} \cdot (-160) + \frac{-9 \cdot 10^6}{36864 \cdot 10^4} \cdot (-120) = +2,20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_4 = \frac{-300 \cdot 10^3}{768 \cdot 10^2} - \frac{13 \cdot 10^6}{65536 \cdot 10^4} \cdot (-160) + \frac{-9 \cdot 10^6}{36864 \cdot 10^4} \cdot (+120) = -3,66 \text{ MPa}$$

In figura sono rappresentate tutte le entità e le grandezze determinate.



La tenso (presso) flessione deviata in campo plastico

Lo studio della sollecitazione di tenso (presso) flessione in campo plastico è cosa alquanto complessa e va effettuato in analogia ai casi di sollecitazione più semplici già considerati. In particolare si può pensare ai risultati ottenuti per la sollecitazione di tenso (presso) flessione retta ampliati considerando che l'azione flessionale agisce secondo entrambe le direzioni principali della sezione. Le condizioni di equilibrio si ricavano considerando che la sezione è divisa dall'asse neutro in due aree sollecitate da un diagramma costante di tensione pari al valore della tensione di snervamento. Le due aree saranno soggette una a compressione e l'altra a trazione. Considerando positiva la sollecitazione di trazione, l'equilibrio alla traslazione ci fornisce la seguente equazione:

$$A_t \cdot \sigma_s - A_c \cdot \sigma_s = N$$

dove con A_t si è indicata la parte di Area della sezione soggetta a trazione e con A_c la parte di Area soggetta a compressione; con N , si è indicato lo sforzo Normale agente sulla sezione.

Indicando con X_{Gt} , Y_{Gt} e con X_{Gc} , Y_{Gc} le coordinate dei baricentri rispettivamente della Area tesa e dell'Area compressa, le condizioni di equilibrio alla rotazione intorno agli assi principali d'inerzia si scrivono:

$$M_x = A_t \cdot Y_{Gt} + A_c \cdot Y_{Gc}$$

$$M_y = A_t \cdot X_{Gt} + A_c \cdot X_{Gc}$$

Le tre condizioni di equilibrio appena scritte reggono la soluzione del problema.

La semplicità delle equazioni di equilibrio che descrivono il problema sembrano far pensare ad una facile soluzione delle stesse, ma in realtà la loro soluzione diretta in relazione a specifici valori di sollecitazione risulta piuttosto ostica anche per sezioni di forma geometrica relativamente semplice. Basti pensare che la posizione dell'asse neutro che rispetta la condizione di equilibrio alla traslazione non è unica, infatti a differenza del caso di tenso flessione retta laddove l'asse neutro deve essere parallelo alla direzione principale intorno alla quale agisce la flessione, nel caso di tenso flessione deviata, l'asse neutro assume una diversa inclinazione la quale dipende dall'azione combinata della flessione in entrambe le direzioni principali.

La soluzione del problema va ricercata operando con tutte e tre le equazioni prima scritte le quali costituiscono a tutti gli effetti un sistema di equazioni completo che va inoltre specializzato per tener conto della reale forma geometrica della sezione.

L'approccio più semplice (si fa per dire) è anche in questo caso la costruzione del dominio di resistenza della sezione il quale dovendo rappresentare la relazione tra tre variabili (N, M_x, M_y)

si presenterà come una superficie nello spazio Cartesiano a tre dimensioni.

Ottenuto il dominio di resistenza della sezione, la verifica di resistenza della sezione è soddisfatta se il punto rappresentativo delle sollecitazioni ultime di progetto è interno alla superficie limite di equilibrio costituita dal dominio di resistenza della sezione.

La costruzione del dominio di resistenza della sezione può essere ottenuta facendo variare opportunamente la posizione dell'asse neutro sia traslandolo e sia ruotandolo; per ogni posizione dell'asse neutro attraverso le condizioni di equilibrio vanno ricavati i valori di N , M_x e M_y esplicabili dalla sezione.

Come già detto il dominio di resistenza a tenso (presso) flessione deviata, è rappresentato da una superficie nello spazio cartesiano. A titolo di esempio riporto una serie di valori e di diagrammi che rappresentano delle sezioni particolari del dominio di resistenza a tenso flessione deviata per la sezione rettangolare. Si rimanda all'Appendice relativa per la comprensione dell'algoritmo utilizzato per il calcolo del dominio.

Il Dominio di resistenza plastico della sezione rettangolare può essere espresso con la relazione che segue :

$$\frac{N}{N_u} + \frac{M_x}{M_{ux}} + \frac{M_y}{M_{uy}} = K$$

dove il valore di K dipende dagli indici di resistenza parziali delle singole sollecitazioni ed assume valori compresi tra 1 e 1,56 circa.

$$1 \leq K \leq 1,56$$

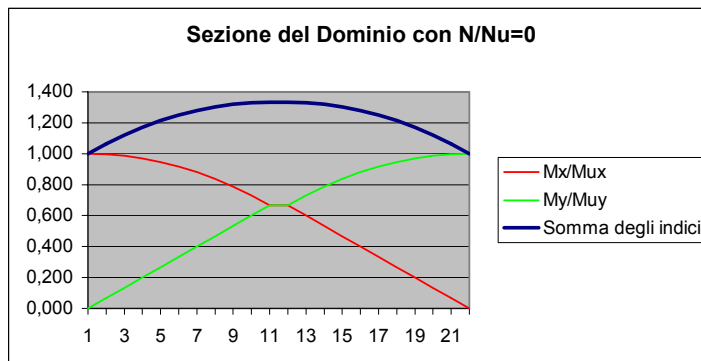
Le sezioni di dominio che appresso si rappresentano ci forniscono il valore di K considerando N costante (N/N_u costante) e momenti flettenti variabili.

Assegnate le sollecitazioni di progetto, si determinano gli indici di resistenza parziali e con quello relativo allo sforzo Normale si individua la sezione di dominio che ci interessa nella quale valutiamo la compatibilità ai fini della resistenza della sezione della coppia di valori degli indici di resistenza relativi alla flessione.

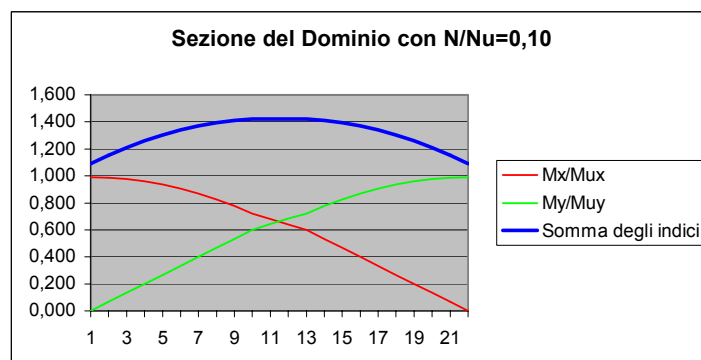
Sezioni del Dominio di resistenza a tenso flessione con N costante

- SEZIONE RETTANGOLARE -

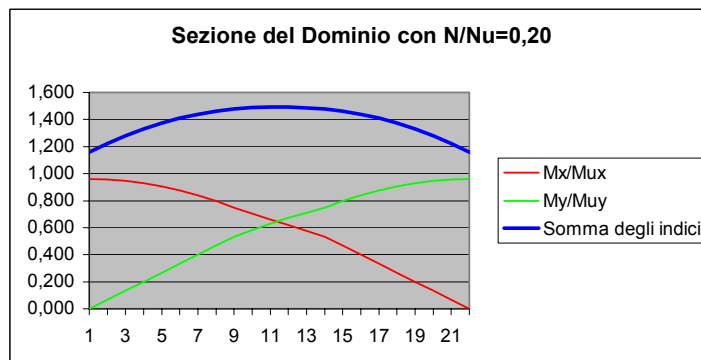
N/Nu	Mx/Mux	My/Muy	N/Nu+Mx/Mux+ +My/Muy
0	1,000	0,000	1,000
0	0,997	0,067	1,063
0	0,987	0,133	1,120
0	0,970	0,200	1,170
0	0,947	0,267	1,213
0	0,917	0,333	1,250
0	0,880	0,400	1,280
0	0,837	0,467	1,303
0	0,787	0,533	1,320
0	0,730	0,600	1,330
0	0,667	0,667	1,333
0	0,667	0,667	1,333
0	0,600	0,730	1,330
0	0,533	0,787	1,320
0	0,467	0,837	1,303
0	0,400	0,880	1,280
0	0,333	0,917	1,250
0	0,267	0,947	1,213
0	0,200	0,970	1,170
0	0,133	0,987	1,120
0	0,067	0,997	1,063
0	0,000	1,000	1,000



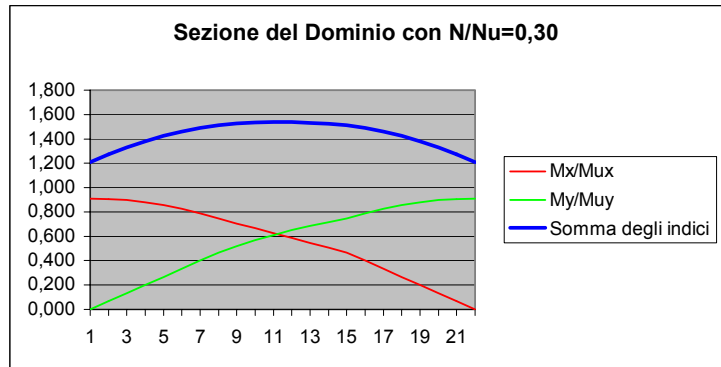
N/Nu	Mx/Mux	My/Muy	N/Nu+Mx/Mux+ +My/Muy
0,1	0,990	0,000	1,090
0,1	0,987	0,067	1,153
0,1	0,977	0,133	1,210
0,1	0,960	0,200	1,260
0,1	0,937	0,267	1,303
0,1	0,907	0,333	1,340
0,1	0,870	0,400	1,370
0,1	0,827	0,467	1,393
0,1	0,777	0,533	1,410
0,1	0,720	0,600	1,420
0,1	0,680	0,643	1,423
0,1	0,640	0,683	1,423
0,1	0,600	0,720	1,420
0,1	0,533	0,777	1,410
0,1	0,467	0,827	1,393
0,1	0,400	0,870	1,370
0,1	0,333	0,907	1,340
0,1	0,267	0,937	1,303
0,1	0,200	0,960	1,260
0,1	0,133	0,977	1,210
0,1	0,067	0,987	1,153
0,1	0,000	0,990	1,090



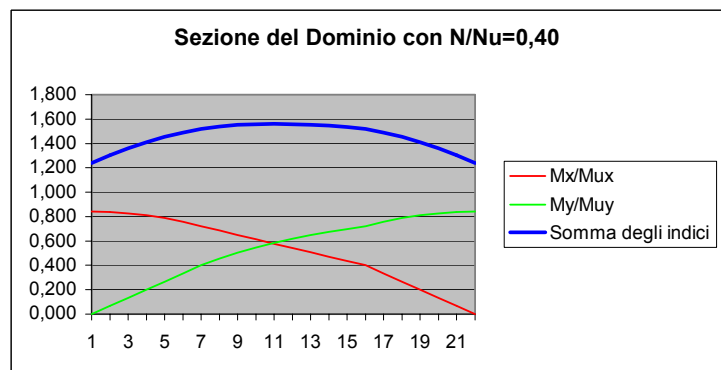
N/Nu	Mx/Mux	My/Muy	N/Nu+Mx/Mux+ +My/Muy
0,2	0,960	0,000	1,160
0,2	0,957	0,067	1,223
0,2	0,947	0,133	1,280
0,2	0,930	0,200	1,330
0,2	0,907	0,267	1,373
0,2	0,877	0,333	1,410
0,2	0,840	0,400	1,440
0,2	0,797	0,467	1,463
0,2	0,747	0,533	1,480
0,2	0,704	0,584	1,488
0,2	0,661	0,630	1,492
0,2	0,619	0,672	1,491
0,2	0,576	0,711	1,487
0,2	0,533	0,747	1,480
0,2	0,467	0,797	1,463
0,2	0,400	0,840	1,440
0,2	0,333	0,877	1,410
0,2	0,267	0,907	1,373
0,2	0,200	0,930	1,330
0,2	0,133	0,947	1,280
0,2	0,067	0,957	1,223
0,2	0,000	0,960	1,160



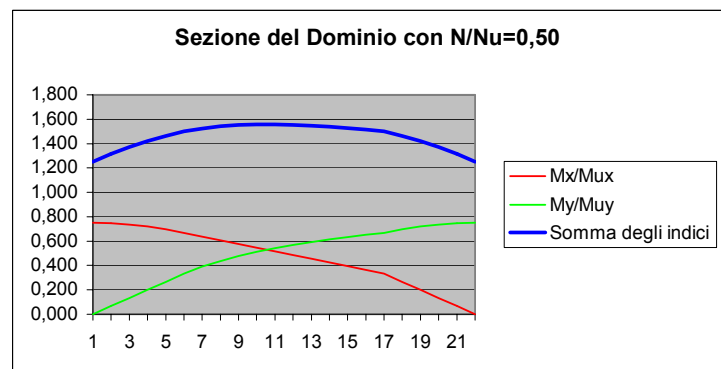
N/Nu	Mx/Mux	My/Muy	N/Nu+Mx/Mux+ +My/Muy
0,3	0,910	0,000	1,210
0,3	0,907	0,067	1,273
0,3	0,897	0,133	1,330
0,3	0,880	0,200	1,380
0,3	0,857	0,267	1,423
0,3	0,827	0,333	1,460
0,3	0,790	0,400	1,490
0,3	0,747	0,467	1,513
0,3	0,707	0,521	1,527
0,3	0,667	0,568	1,535
0,3	0,627	0,611	1,538
0,3	0,587	0,650	1,537
0,3	0,547	0,685	1,532
0,3	0,507	0,717	1,524
0,3	0,467	0,747	1,513
0,3	0,400	0,790	1,490
0,3	0,333	0,827	1,460
0,3	0,267	0,857	1,423
0,3	0,200	0,880	1,380
0,3	0,133	0,897	1,330
0,3	0,067	0,907	1,273
0,3	0,000	0,910	1,210



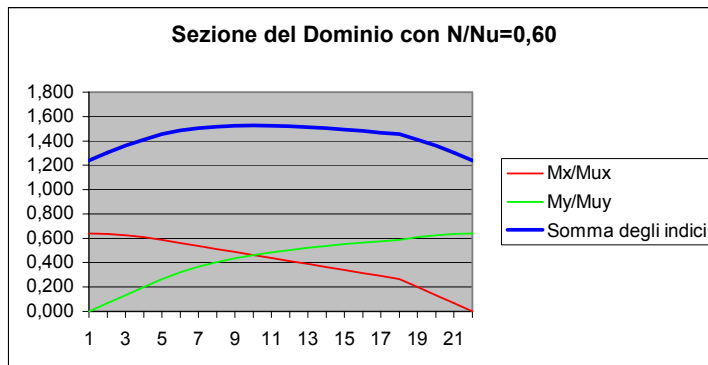
N/Nu	Mx/Mux	My/Muy	N/Nu+Mx/Mux+ +My/Muy
0,4	0,840	0,000	1,240
0,4	0,837	0,067	1,303
0,4	0,827	0,133	1,360
0,4	0,810	0,200	1,410
0,4	0,787	0,267	1,453
0,4	0,757	0,333	1,490
0,4	0,720	0,400	1,520
0,4	0,684	0,455	1,540
0,4	0,649	0,503	1,552
0,4	0,613	0,545	1,559
0,4	0,578	0,583	1,561
0,4	0,542	0,616	1,558
0,4	0,507	0,646	1,553
0,4	0,471	0,673	1,544
0,4	0,436	0,698	1,533
0,4	0,400	0,720	1,520
0,4	0,333	0,757	1,490
0,4	0,267	0,787	1,453
0,4	0,200	0,810	1,410
0,4	0,133	0,827	1,360
0,4	0,067	0,837	1,303
0,4	0,000	0,840	1,240



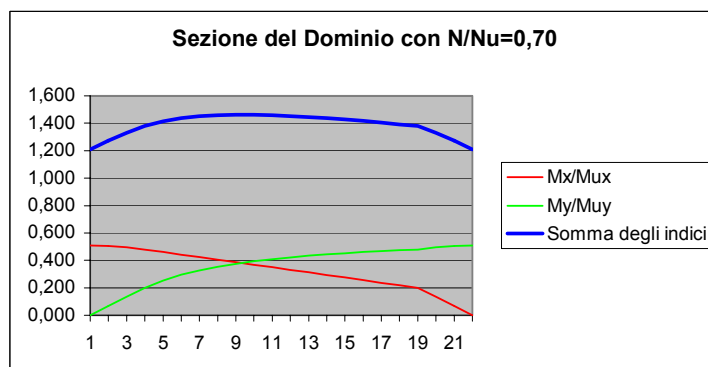
N/Nu	Mx/Mux	My/Muy	N/Nu+Mx/Mux+ +My/Muy
0,5	0,750	0,000	1,250
0,5	0,747	0,067	1,313
0,5	0,737	0,133	1,370
0,5	0,720	0,200	1,420
0,5	0,697	0,267	1,463
0,5	0,667	0,333	1,500
0,5	0,636	0,389	1,525
0,5	0,606	0,436	1,542
0,5	0,576	0,476	1,552
0,5	0,545	0,511	1,557
0,5	0,515	0,542	1,557
0,5	0,485	0,569	1,553
0,5	0,455	0,593	1,547
0,5	0,424	0,614	1,538
0,5	0,394	0,633	1,527
0,5	0,364	0,651	1,514
0,5	0,333	0,667	1,500
0,5	0,267	0,697	1,463
0,5	0,200	0,720	1,420
0,5	0,133	0,737	1,370
0,5	0,067	0,747	1,313
0,5	0,000	0,750	1,250



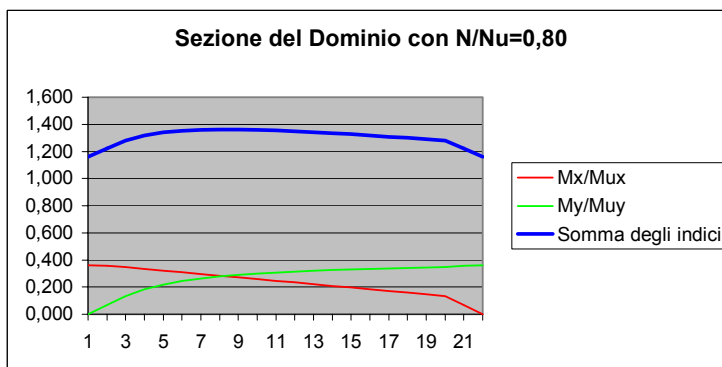
N/Nu	Mx/Mux	My/Muy	N/Nu+Mx/Mux+ +My/Muy
0,6	0,640	0,000	1,240
0,6	0,637	0,067	1,303
0,6	0,627	0,133	1,360
0,6	0,610	0,200	1,410
0,6	0,587	0,267	1,453
0,6	0,562	0,322	1,484
0,6	0,537	0,367	1,504
0,6	0,513	0,404	1,517
0,6	0,488	0,435	1,523
0,6	0,464	0,462	1,525
0,6	0,439	0,485	1,524
0,6	0,414	0,505	1,519
0,6	0,390	0,523	1,512
0,6	0,365	0,538	1,503
0,6	0,341	0,552	1,493
0,6	0,316	0,565	1,481
0,6	0,291	0,576	1,468
0,6	0,267	0,587	1,453
0,6	0,200	0,610	1,410
0,6	0,133	0,627	1,360
0,6	0,067	0,637	1,303
0,6	0,000	0,640	1,240



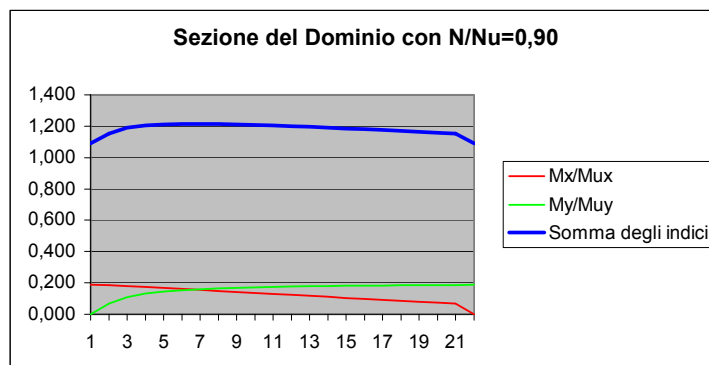
N/Nu	Mx/Mux	My/Muy	N/Nu+Mx/Mux+ +My/Muy
0,7	0,510	0,000	1,210
0,7	0,507	0,067	1,273
0,7	0,497	0,133	1,330
0,7	0,480	0,200	1,380
0,7	0,461	0,254	1,415
0,7	0,443	0,295	1,438
0,7	0,424	0,327	1,451
0,7	0,405	0,353	1,459
0,7	0,387	0,375	1,462
0,7	0,368	0,393	1,461
0,7	0,349	0,409	1,458
0,7	0,331	0,422	1,452
0,7	0,312	0,433	1,445
0,7	0,293	0,443	1,437
0,7	0,275	0,452	1,427
0,7	0,256	0,460	1,416
0,7	0,237	0,468	1,405
0,7	0,219	0,474	1,393
0,7	0,200	0,480	1,380
0,7	0,133	0,497	1,330
0,7	0,067	0,507	1,273
0,7	0,000	0,510	1,210



N/Nu	Mx/Mux	My/Muy	N/Nu+Mx/Mux+ +My/Muy
0,8	0,360	0,000	1,160
0,8	0,357	0,067	1,223
0,8	0,347	0,133	1,280
0,8	0,334	0,184	1,318
0,8	0,322	0,219	1,340
0,8	0,309	0,244	1,353
0,8	0,296	0,263	1,359
0,8	0,284	0,277	1,361
0,8	0,271	0,289	1,361
0,8	0,259	0,299	1,358
0,8	0,246	0,307	1,354
0,8	0,234	0,314	1,348
0,8	0,221	0,320	1,342
0,8	0,209	0,326	1,334
0,8	0,196	0,330	1,326
0,8	0,184	0,334	1,318
0,8	0,171	0,338	1,309
0,8	0,158	0,341	1,300
0,8	0,146	0,344	1,290
0,8	0,133	0,347	1,280
0,8	0,067	0,357	1,223
0,8	0,000	0,360	1,160



N/Nu	Mx/Mux	My/Muy	N/Nu+Mx/Mux+ +My/Muy
0,9	0,190	0,000	1,090
0,9	0,187	0,067	1,153
0,9	0,180	0,110	1,190
0,9	0,174	0,132	1,206
0,9	0,168	0,145	1,213
0,9	0,161	0,154	1,215
0,9	0,155	0,160	1,216
0,9	0,149	0,165	1,214
0,9	0,142	0,169	1,212
0,9	0,136	0,172	1,208
0,9	0,130	0,175	1,204
0,9	0,124	0,177	1,200
0,9	0,117	0,179	1,196
0,9	0,111	0,180	1,191
0,9	0,105	0,181	1,186
0,9	0,098	0,183	1,181
0,9	0,092	0,184	1,175
0,9	0,086	0,184	1,170
0,9	0,079	0,185	1,165
0,9	0,073	0,186	1,159
0,9	0,067	0,187	1,153
0,9	0,000	0,190	1,090



Le sezioni tenso (presso) inflesse realizzate con profilati metallici, tipicamente a doppio T, non presentano valori di K che si discostano molto dall'unità, e pertanto per tali sezioni potrà adottarsi a vantaggio di statica un dominio di resistenza plastico costituito dalla sfera di equazione:

$$\frac{N}{N_u} + \frac{M_x}{M_{ux}} + \frac{M_y}{M_{uy}} = 1.$$

Con tale Dominio la verifica può considerarsi soddisfatta se la somma degli indici parziali di resistenza è inferiore o uguale all'unità. Analogamente alla sollecitazione di tenso flessione retta, se lo sforzo Normale è contenuto entro il 10% di Nu, si può trascurare la presenza dello sforzo Normale e procedere alla verifica della sezione considerando agenti solo le sollecitazioni flessionali.

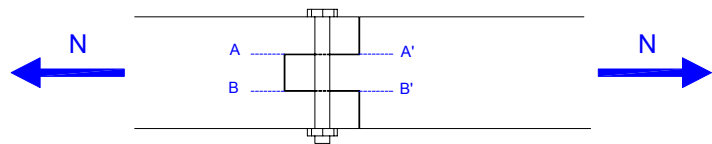
La sollecitazione di Taglio

La sollecitazione da Taglio nelle travi è sempre abbinata alla sollecitazione da flessione, infatti si ricordi che il valore del Taglio in una sezione di trave, rappresenta proprio la pendenza del diagramma del Momento in quella sezione. Ci possono essere sezioni di passaggio nelle quali il momento flettente è nullo ed il Taglio è diverso da zero ma nell'intorno di queste sezioni, se il Taglio è diverso da zero, il Momento flettente assumerà valori diversi al variare della sezione. Esistono situazioni diverse di sollecitazione nelle quali può aversi esclusivamente sollecitazione di taglio. E' il caso per esempio delle giunzioni di elementi di trave realizzate in particolare modo e soggette a sollecitazioni particolari.

La sollecitazione di Taglio semplice

Si faccia riferimento per esempio al caso di un'asta di trave soggetta a trazione semplice e giuntata con un perno come nella figura a fianco. L'azione del perno impedisce lo scorrimento tra i due tratti che si avrebbe lungo le superfici di contatto AA' e BB'. Sul perno agirà, proprio in corrispondenza di queste superfici, un sforzo di Taglio che equilibrerà lo sforzo N applicato ai due tratti di trave. Lo sforzo di Taglio a cui è soggetto il bullone lungo le due superficie è pari quindi a:

$$T = \frac{N}{2}$$



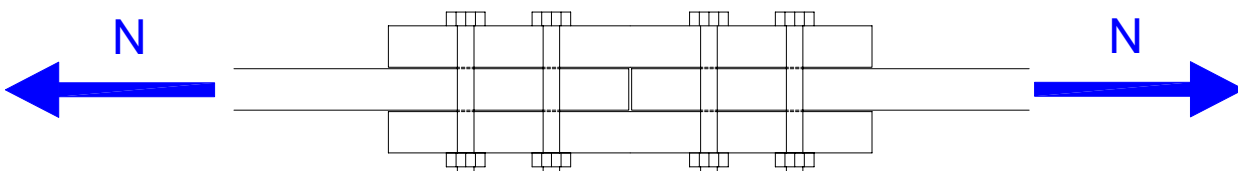
Tale sforzo di taglio comporterà una distribuzione delle τ costante e pari a: $\tau = \frac{T}{A}$, dove con A si è indicata l'area del bullone. La verifica di resistenza del bullone sarà soddisfatta se il valore di τ così calcolato risulta inferiore alla τ_a , τ ammissibile.

Le norme definiscono per alcuni materiali direttamente il valore ammissibile per la τ_a , ma per l'acciaio (per i materiali duttili in genere) il valore ammissibile della τ_a può essere ricavato in

funzione della σ_a ed assumersi quindi pari a $\tau_a = \frac{\sigma_a}{\sqrt{3}}$.

Facciamo un esempio numerico

Si analizzi il giunto rappresentato in figura.



L'asta da giuntare è soggetta ad uno sforzo Normale di Trazione pari a 40 KN. La continuità del giunto è realizzata attraverso la sovrapposizione di due lastre metalliche di sezione uguale a quella dell'asta e da due bulloni del diametro di 12 mm su ogni lato del giunto. La trasmissione dello sforzo Normale tra i due elementi di asta, avviene trasferendo lo sforzo da un lato dell'asta alle due

lastre di ricoprimento attraverso l'azione di resistenza a taglio dei bulloni. Lo sforzo di Taglio agente sulla coppia di bulloni sarà pari a $T = \frac{N}{2} = \frac{40}{2} = 20KN$, in quanto l'azione viene trasferita lungo le due superfici di contatto corrispondenti alle due lastre di sovrapposizione. Su ogni lato si hanno due bulloni i quali si ripartiscono lo sforzo di Taglio appena calcolato, e quindi ogni bullone assorbirà la metà dello sforzo di Taglio agente sul giunto. La tensione tangenziale agente sulla sezione di ogni bullone viene così calcolata:

$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 12^2}{4} = 113 \text{ mm}^2$$

$$\tau = \frac{T}{2 \cdot A} = \frac{20 \cdot 10^3}{2 \cdot 113} = 88,5 \text{ MPa}$$

Assumendo che l'acciaio costituente i bulloni ha una tensione assiale ammissibile $\sigma_a = 160 \text{ MPa}$ si determina una tensione tangenziale ammissibile per i bulloni pari a:

$$\tau_a = \frac{\sigma_a}{\sqrt{3}} = \frac{160}{\sqrt{3}} = 92,37 \text{ MPa}$$

La tensione tangenziale che sollecita la sezione dei bulloni risulta quindi inferiore a quella ammissibile; il giunto è verificato.

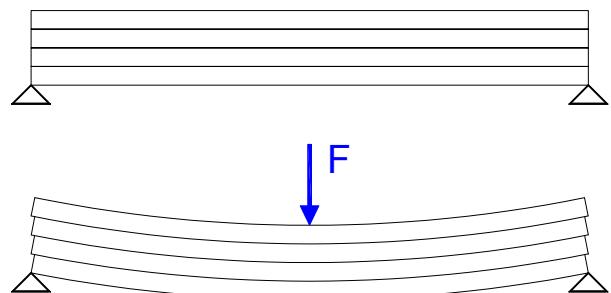
Se invece del metodo alle tensioni ammissibili si adotta il metodo semiprobabilistico agli stati limite, la verifica del giunto va condotta in maniera del tutto analoga, considerando però uno sforzo Normale di calcolo ottenuto applicando gli opportuni coefficienti di sicurezza parziale sui carichi e confrontando le tensioni indotte dal collegamento con quelle di snervamento del materiale costituente i bulloni ridotte del coefficiente di sicurezza per il materiale.

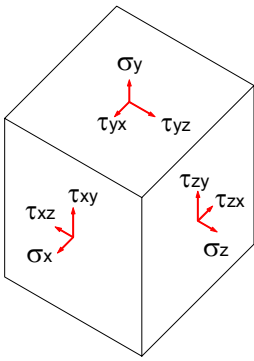
La sollecitazione di Taglio nelle travi inflesse

Nelle travi, la sollecitazione di Taglio agisce sempre in abbinamento al Momento flettente, e pertanto si è sempre in condizioni di sollecitazione composta di Taglio e Flessione. La determinazione delle tensioni tangenziali in una sezione, viene condotta attraverso la ripartizione dello sforzo di scorrimento che si genera tra le fibre a distanza diversa dall'asse neutro. Per meglio comprendere quale è lo sforzo di scorrimento di cui parliamo, proviamo ad analizzare il comportamento di una trave realizzata attraverso la semplice sovrapposizione di diverse tavole. Sotto l'azione della forza applicata, la trave tende a deformarsi e poiché le singole tavole sono semplicemente appoggiate l'una sull'altra, l'effetto di deformazione comporta lo scorrimento delle tavole l'una sull'altra.

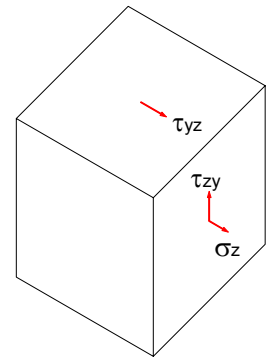
Se ripetiamo la prova immaginando di incollare le tavole l'una sull'altra in maniera che non sia più possibile questo scorrimento, la deformazione della trave risulterà certamente minore e l'azione che prima provocava lo scorrimento tra le tavole sarà assorbita sulle superfici di contatto delle tavole sotto forma di tensione tangenziale.

Se consideriamo un elementino cubico (di dimensioni infinitamente piccole) estratto dalla trave, lo stato di tensione agente sull'elementino è così costituito:





Se immaginiamo di trovarci in una situazione di carico e di sollecitazione agente nel solo piano YZ della trave, saranno diverse da zero le sole tensioni agenti in questo piano e quindi lo stato tensionale si riduce a quello rappresentato sull'elementino a destra.

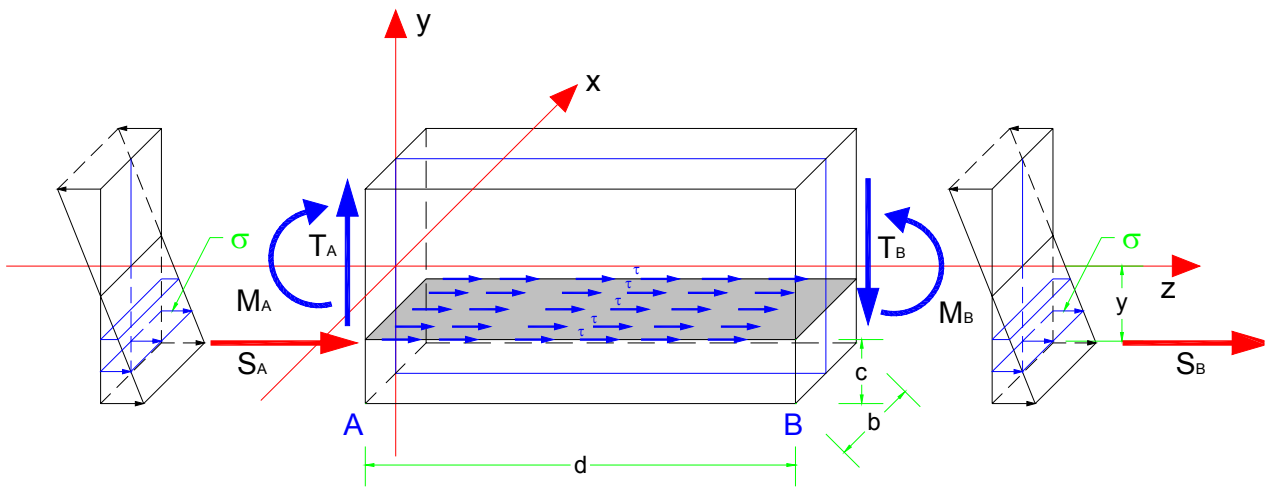


Si ricordi che per il principio di reciprocità si ha la seguente uguaglianza: $\tau_{zy} = \tau_{yz}$; inoltre la τ_{yz} si può ottenere proprio valutando lo sforzo di scorrimento a cui si faceva riferimento prima.

In definitiva per valutare la tensione tangenziale indotta dalla sollecitazione di Taglio nelle travi, si ricerca lo sforzo di scorrimento che si genera per effetto dell'azione contemporanea del Taglio e del Momento flettente.

Consideriamo un tratto di trave costituito da una sezione di materiale elastico ed omogeneo, di lunghezza molto piccola (infinitamente piccola), così da poter trascurare il peso ed i carichi agenti sul tratto di trave. Vogliamo determinare lo sforzo di scorrimento e quindi la tensione tangenziale che si genera lungo una certa superficie all'interno della trave.

Prendiamo in considerazione le due sezioni di Trave **A** e **B** poste alla distanza d una dall'altra. Sulla sezione **A** agisce il Momento flettente M_A ed il taglio T_A . Sulla sezione **B**, essendo la distanza d estremamente piccola e quindi potendosi trascurare il peso del tratto di trave considerato e del carico su questo applicato, agisce il Taglio T_B il cui valore è uguale a T_A ed il Momento M_B pari a $M_B = M_A + T_A \cdot d$.



Vogliamo determinare l'azione di scorrimento e quindi la tensione tangenziale che si genera tra le sezioni **A** e **B** lungo la superficie che dista c dal bordo inferiore della trave. A tal proposito poniamo pari a y la distanza del baricentro della porzione di sezione che si trova al disotto della corda posta alla distanza c dal bordo della trave. Lo scorrimento S_{AB} è dato dalla differenza tra gli sforzi S_B e S_A che rappresentano la risultante delle tensioni assiali σ agenti sulla parte di sezione considerata:

$$S_A = \sigma_A \cdot b \cdot c; \quad S_B = \sigma_B \cdot b \cdot c$$

I valori delle tensioni assiali si calcolano attraverso le relazioni di Navier:

$$\sigma_A = \frac{M_A}{J_x} \cdot y; \quad \sigma_B = \frac{M_B}{J_x} \cdot y = \frac{M_A + T_A \cdot d}{J_x} \cdot y = \frac{M_A}{J_x} \cdot y + \frac{T_A \cdot d}{J_x} \cdot y$$

Lo scorrimento S_{AB} è dato quindi da:

$$S_{AB} = S_B - S_A = \sigma_B \cdot b \cdot c - \sigma_A \cdot b \cdot c = (\sigma_B - \sigma_A) \cdot b \cdot c$$

$$S_{AB} = \left(\frac{M_A}{J_x} \cdot y + \frac{T_A \cdot d}{J_x} \cdot y - \frac{M_A}{J_x} \cdot y \right) \cdot b \cdot c = \frac{T_A \cdot d}{J_x} \cdot y \cdot b \cdot c = \frac{T_A \cdot d}{J_x} \cdot S_x$$

dove con S_x si è indicato il momento statico della parte di sezione delimitata dalla superficie considerata rispetto all'asse baricentrico (coincidente con l'asse neutro della flessione).

Se immaginiamo che lo sforzo di scorrimento appena calcolato si ripartisca in maniera uniforme lungo la superficie considerata si deve avere:

$$S_{AB} = \tau \cdot b \cdot d$$

e cioè:

$$\tau \cdot b \cdot d = \frac{T_A \cdot d}{J_x} \cdot S_x$$

dalla quale si ricava il valore della tensione tangenziale agente sulla fibra considerata

$$\tau = \frac{T_A \cdot S_x}{J_x \cdot b}$$

La formula che si è appena ricavata è conosciuta con il nome di formula di Jouravski.

Tale formula è in grado di fornirci la variazione delle tensioni tangenziali lungo le varie fibre di una sezione di trave sollecitata da un Taglio pari T.

$$\tau = \frac{T \cdot S_x}{J_x \cdot b}$$

In maniera più generale gli elementi che compaiono nella formula rappresentano:

T = Taglio agente sulla sezione considerata

S_x = Momento statico della porzione di sezione delimitata dalla corda (fibra considerata)

J_x = Momento d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse baricentrico x

b = Lunghezza della corda che individua la fibra considerata.

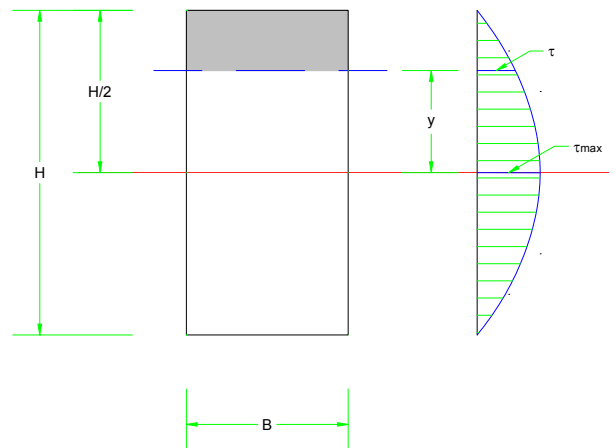
Facendo riferimento alla sezione rettangolare in figura si può facilmente verificare che il diagramma delle τ è di forma parabolica e che il valore massimo della tensione tangenziale si verifica lungo la fibra baricentrica.

Facendo riferimento alla fibra generica posta alla distanza y dal baricentro l'espressione di Jouravski ci fornisce il seguente valore della τ .

$$\tau = \frac{T \cdot S_x}{J_x \cdot B}$$

dove :

$$J_x = \frac{B \cdot H^3}{12}$$



$$S_x = B \cdot \left(\frac{H}{2} - y \right) \cdot \frac{\left(\frac{H}{2} - y \right)}{2} = B \cdot \frac{\left(\frac{H}{2} - y \right)^2}{2}$$

La forma quadratica del momento statico della sezione al di sopra della fibra y comporta la variazione parabolica del valore della τ lungo l'altezza della sezione.

Il valore massimo della tensione tangenziale si raggiunge in corrispondenza della fibra baricentrica dove il valore del momento statico, riguardando mezza sezione raggiunge il suo valore massimo.

Il valore della tensione tangenziale massima è data dalla formula che segue, ottenuta dalla formula generale per $y=0$.

$$y = 0 \Rightarrow S_x = B \cdot \frac{\left(\frac{H}{2} \right)^2}{2} = B \cdot \frac{H^2}{8}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot B \cdot \frac{H^2}{8}}{\frac{B \cdot H^3}{12} \cdot B} = \frac{12}{8} \cdot \frac{T}{B \cdot H} = \frac{3}{2} \frac{T}{A}$$

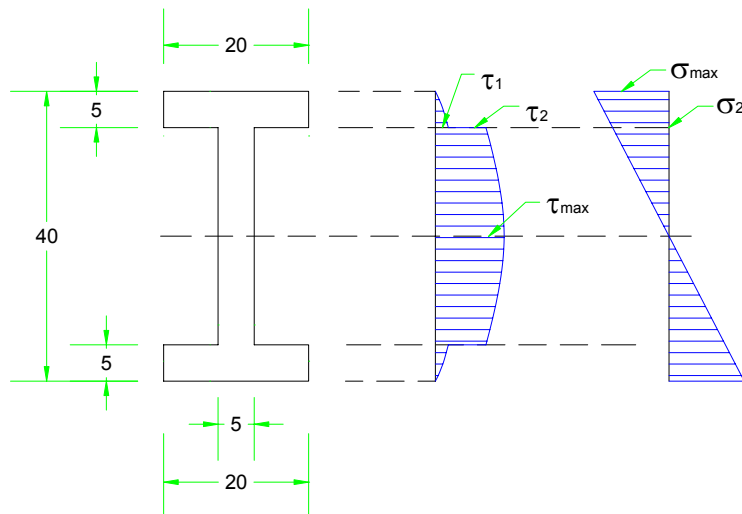
dove con **A** si è indicata l'area della sezione rettangolare.

Facciamo un esempio numerico

Determiniamo ora il diagramma delle τ su di una sezione a doppio T.

Le dimensioni geometriche sono riportati in figura.

Per potere rappresentare il diagramma delle tensioni tangenziali, calcoleremo il valore di τ in tre sezioni particolari: all'attacco ala-anima calcoleremo due valori, uno per l'ala, e l'altro per l'anima; calcoleremo inoltre il valore massimo di τ che si verifica in corrispondenza della fibra baricentrica. Tenendo presente che agli estremi superiori ed inferiori la τ è nulla e che l'andamento del diagramma è parabolico, avremo sufficienti elementi per poter disegnare il diagramma con una certa approssimazione grafica.



La formula da applicare per il calcolo di τ è quella di Jouravski, nella quale, assegnata la sezione, il valore di **T** ed il valore del momento d'inerzia **J_x** rappresentano le costanti del problema.

$$J_x = 2 \cdot \left(20 \cdot \frac{5^3}{12} + 20 \cdot 5 \cdot 17,5^2 + \frac{5 \cdot 15^3}{3} \right) \cong 72917 \text{ cm}^4 = 729,17 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Per determinare il valore della τ che si verifica nell'ala in corrispondenza dell'attacco con l'anima, dovremo considerare il momento statico dell'ala rispetto al baricentrico, mentre la corda b è pari alla larghezza dell'ala.

$$S_x = 20 \cdot 5 \cdot 17,5 = 1750 \text{ cm}^3 = 1,750 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$b = 20 \text{ cm} = 200 \text{ mm}$$

$$\tau_1 = \frac{T \cdot S_x}{J_x \cdot b} = T \cdot \frac{1,750 \cdot 10^6}{729,17 \cdot 10^6 \cdot 200} = 1,20 \cdot 10^{-5} \cdot T$$

Per determinare il valore della τ che si verifica nell'anima in corrispondenza dell'attacco con l'ala, il momento statico da considerare è sempre quello dell'ala, mentre la corda b è pari alla larghezza dell'anima.

$$S_x = 20 \cdot 5 \cdot 17,5 = 1750 \text{ cm}^3 = 1,750 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$b = 5 \text{ cm} = 50 \text{ mm}$$

$$\tau_2 = \frac{T \cdot S_x}{J_x \cdot b} = T \cdot \frac{1,750 \cdot 10^6}{729,17 \cdot 10^6 \cdot 50} = 4,80 \cdot 10^{-5} \cdot T$$

Il valore massimo per la tensione tangenziale si ottiene infine in corrispondenza del baricentro. Per il calcolo della τ si dovrà determinare il momento statico di mezza sezione e la corda b è pari alla larghezza dell'anima.

$$S_x = 20 \cdot 5 \cdot 17,5 + 5 \cdot \frac{15^2}{2} = 2312,5 \text{ cm}^3 = 2,3125 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$b = 5 \text{ cm} = 50 \text{ mm}$$

$$\tau_2 = \frac{T \cdot S_x}{J_x \cdot b} = T \cdot \frac{2,3125 \cdot 10^6}{729,17 \cdot 10^6 \cdot 50} = 6,34 \cdot 10^{-5} \cdot T$$

In figura è riportato qualitativamente il diagramma delle tensioni calcolate. Si noti il salto di valore che si verifica in corrispondenza della posizione di attacco ala – anima.

Nella figura è anche riportato qualitativamente il diagramma delle σ derivanti dalla sollecitazione contemporanea di flessione. Si noti che laddove le σ da flessione raggiungono il massimo valore, le τ da taglio sono nulle, mentre le τ raggiungono il valore massimo in corrispondenza del baricentro dove invece le σ da flessione sono nulle. Da ciò deriva che con sezioni piene (rettangolari), può solitamente effettuarsi una verifica separata al Taglio ed alla flessione, confrontando le tensioni massime da taglio e da flessione con quelle ammissibili per il materiale. Un discorso a parte meritano invece le sezioni sottili a doppio T solitamente adottate nelle strutture in acciaio. Come si può vedere anche dai diagrammi delle τ e delle σ prima disegnati in corrispondenza dell'attacco ala-anima, si hanno contemporaneamente valori significativi sia delle σ sia delle τ . Per tali sezioni risulta opportuno procedere alla verifica tenendo conto anche dei valori delle tensioni che si verificano in corrispondenza proprio dell'attacco ala-anima. La contemporaneità della tensione assiale e tangenziale può essere considerata applicando specifici criteri di resistenza idonei per il materiale della sezione. Tali criteri di resistenza comportano la determinazione di una tensione assiale ideale, funzione dello stato tensionale reale, da confrontarsi con la tensione ammissibile del materiale.

Per materiali duttili tipo l'acciaio, viene ritenuto efficace il criterio di resistenza di Hencky – Von Mises secondo il quale la tensione ideale da confrontarsi con la tensione ammissibile del materiale si determina, in condizione di stato piano di tensione, con la seguente formula:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

Con il metodo delle tensioni ammissibili, le sezioni in acciaio soggette contemporaneamente a flessione e taglio, la verifica viene condotta confrontando la tensione ideale così calcolata con la tensione ammissibile del materiale.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq \sigma_a$$

Si può facilmente riscontrare che per la formula appena riportata, se la tensione assiale σ è uguale a zero, si può determinare che il massimo valore di τ ammissibile è pari proprio a:

$$\sigma_{id} = \sqrt{3 \cdot \tau^2} \leq \sigma_a \quad \Rightarrow \quad \tau \leq \frac{\sigma_a}{\sqrt{3}}$$

Esempi applicativi

Esercizio 1)

Si riprenda la trave già risolta in un esercizio precedente e riportata nella figura che segue. Per tale trave si è già provveduto al progetto ed alla verifica della sezione tenendo conto dello stato di sollecitazione di presso flessione. Ci si pone ora l'obiettivo di verificare che la sezione assegnata risulti verificata anche per la sollecitazione di Taglio.

Il materiale adottato per la sezione è un legno di massiccio di 2° Categoria, per il quale può considerarsi una tensione tangenziale massima ammissibile pari a:

$$\tau_a = 1,2 \text{ MPa}$$

La sezione adottata e verificata a presso flessione è una sezione rettangolare di dimensioni **B** x **H** pari a:

$$B = 380 \text{ mm}$$

$$H = 520 \text{ mm}$$

L'area della sezione è pari a:

$$A = 380 \cdot 520 = 1976 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

La sezione nella quale il Taglio raggiunge il suo valore massimo è la sezione di appoggio dove il Taglio assume il seguente valore:

$$T = 8000 \text{ daN} = 80000 \text{ N}$$

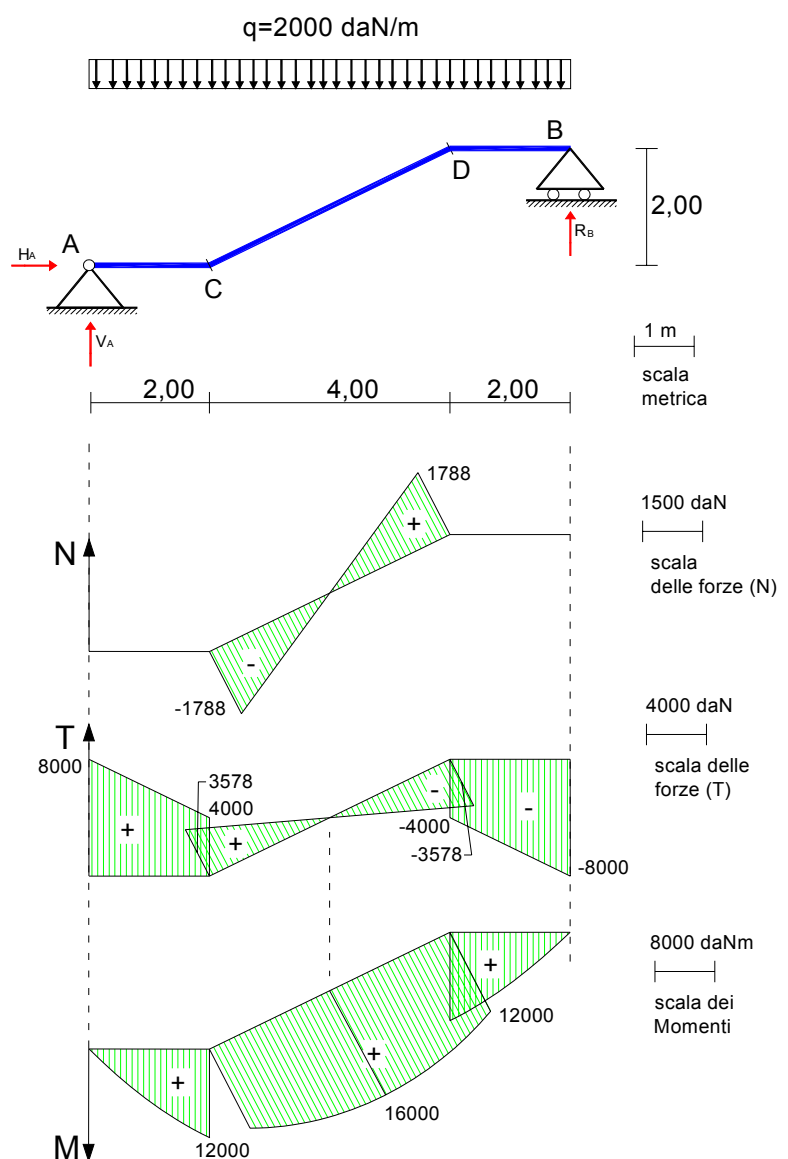
Si ricorda che trattandosi di una sezione rettangolare si può effettuare la verifica a taglio senza tener conto dello stato di tensione assiale contemporaneo, infatti laddove la τ è massima (nel baricentro) la σ è nulla.

Si fa ancora notare che per la trave che si sta analizzando, nella sezione di appoggio dove il Taglio raggiunge il suo valore massimo, il momento è nullo, e quindi in tale sezione saranno nulle le σ in corrispondenza di qualunque fibra della sezione.

La verifica a Taglio per la trave in oggetto andrà quindi effettuata confrontando semplicemente il

valore massimo della tensione tangenziale con quello ammissibile per il materiale.

Trattandosi di sezione rettangolare, la tensione tangenziale massima da taglio è data dalla formula:



$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A} = 1,5 \cdot \frac{T}{A} = 1,5 \cdot \frac{80000}{197600} = 0,61 \text{ MPa}$$

La tensione tangenziale massima da taglio calcolata è inferiore a quella ammissibile, quindi la sezione risulta verificata anche nei riguardi della sollecitazione di Taglio.

La sezione rettangolare progettata, essendo verificata nei riguardi di tutte le sollecitazioni presenti, è idonea a realizzare la struttura calcolata.

Esercizio 2)

Con il metodo delle tensioni ammissibili si progetti la sezione in acciaio di tipo IPE idonea a realizzare la mensola in figura.

Si tratta di una semplice mensola soggetta ad un carico uniformemente distribuito.

Il diagramma del momento sarà parabolico e raggiungerà il suo massimo nella sezione di appoggio con il seguente valore:

$$M_A = -\frac{q \cdot l^2}{2} = -\frac{6 \cdot 2^2}{2} = -12 \text{ KNm}$$

Il diagramma del taglio sarà costituito da una retta inclinata che fornirà il valore nullo in corrispondenza dell'estremità della mensola ed il valore massimo nella sezione di incastro.

$$T_A = q \cdot l = 6 \cdot 2 = 12 \text{ KN}$$

La sezione di incastro è quindi la sezione più sollecitata e vede la presenza contemporanea di flessione e taglio. Nella fase di progetto della sezione si prenderà in considerazione la sola sollecitazione flessionale, mentre nella fase di verifica della sezione si terrà conto della azione combinata delle flessione e del taglio.

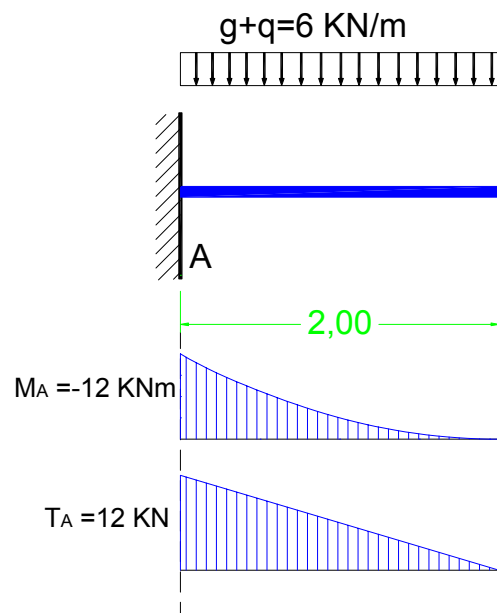
Adottiamo come materiale un acciaio tipo Fe 360 il quale presenta il seguente valore della tensione ammissibile : $\sigma_a = 160 \text{ MPa}$. Le sollecitazioni espresse in Newton e millimetri sono le seguenti: $M = 12 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$; $T = 12 \cdot 10^3 \text{ N}$.

Determiniamo il modulo di resistenza elastico di progetto:

$$W_x = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{12 \cdot 10^6}{160} = 75'000 \text{ mm}^3 = 75 \text{ cm}^3$$

Dal sagomario si ricava che la sezione di tipo IPE che ha un modulo di resistenza elastico appena maggiore di quello di progetto è la IPE 140 il cui $W_x = 77,32 \text{ cm}^3$.

Poiché la sezione è a forma di doppio T ed è sollecitata contemporaneamente da flessione e Taglio, abbiamo la necessità di effettuare la verifica in tre posizioni particolari della sezione, e cioè ai bordi dove si avrà solo tensione assiale (σ), in corrispondenza dell'asse neutro, dove agirà



esclusivamente la tensione tangenziale (τ), ed infine nella posizione di attacco ala – anima, dove si avrà contemporaneamente sia tensione assiale (σ) sia tensione tangenziale (τ).

Verifica delle Tensioni ai bordi della sezione

Ai bordi della sezione si avranno le seguenti tensioni

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x} = \frac{12 \cdot 10^6}{77,32 \cdot 10^3} = 155,20 \text{ MPa} \quad \tau = 0$$

Solo la tensione assiale è diversa da zero e la verifica di resistenza risulta soddisfatta essendo :

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sigma_{\max} = 155,20 \text{ MPa} < \sigma_a = 160 \text{ MPa}$$

Verifica delle Tensioni al baricentro della sezione

L'asse baricentrico è asse neutro nella flessione e quindi la tensione assiale è nulla. La tensione tangenziale invece raggiunge il suo massimo valore e può essere calcolata con la formula di Jouravski.

Dal sagomario ricaviamo direttamente il valore del momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse x mentre il momento statico di mezza sezione rispetto all'asse x lo otteniamo dividendo per due il relativo modulo di resistenza plastico. La dimensione della corda b al baricentro corrisponde allo spessore dell'anima, anch'esso ricavato direttamente dal sagomario.

$$J_x = 541,2 \text{ cm}^4; \quad S_x = \frac{W_{xpl}}{2} = \frac{88,34}{2} = 44,17 \text{ cm}^3; \quad b = 4,7 \text{ mm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot S_x}{J_x \cdot b} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 44,17 \cdot 10^3}{541,2 \cdot 10^4 \cdot 4,7} = 20,84 \text{ MPa}; \quad \sigma = 0$$

Per effettuare la verifica calcoliamo la tensione ideale e la confrontiamo con la tensione massima ammissibile.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{3 \cdot 20,84^2} = 36,10 \text{ MPa} < \sigma_a = 160 \text{ MPa}$$

Verifica delle Tensioni all'attacco ala-anima

Nella posizione di attacco ala-anima entrambe le tensioni sono diverse da zero e vanno determinate. Per la determinazione della tensione assiale utilizzeremo la formula classica di Navier che ci fornisce il valore della σ al variare della distanza della fibra dal baricentro. La distanza della posizione di attacco ala-anima viene determinata sottraendo a mezza altezza della sezione lo spessore dell'ala ricavato direttamente dal sagomario.

$$\sigma = \frac{M}{J_x} \cdot y = \frac{12 \cdot 10^6}{541,2 \cdot 10^4} \cdot (70 - 6,9) = 139,91 \text{ MPa}$$

La tensione tangenziale da taglio viene valutata con la formula di Jouravski nella quale il momento statico S_x sarà quello dell'ala rispetto al baricentro, e la dimensione della corda b sarà lo spessore dell'anima.

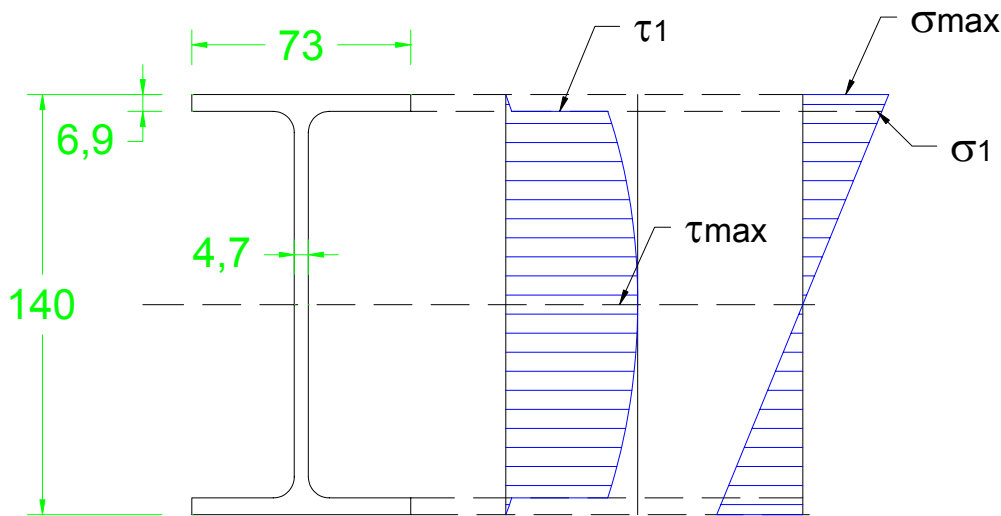
$$S_x = 73 \cdot 6,9 \cdot \left(70 - \frac{6,9}{2}\right) = 33521,235 \text{ mm}^3; \quad b = 4,7 \text{ mm}$$

$$\tau = \frac{T \cdot S_x}{J_x \cdot b} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 33521,235}{541,2 \cdot 10^4 \cdot 4,7} = 15,81 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{139,91^2 + 3 \cdot 15,81^2} = 142,56 \text{ MPa} < \sigma_a = 160 \text{ MPa}$$

La sezione è verificata.

In figura è rappresentata la sezione ed i diagrammi della tensione assiale e della tensione tangenziale.



Dal diagramma delle tensioni tangenziali da Taglio, si evidenzia che in pratica potrebbe ritenersi con buona approssimazione che tutto il Taglio venga assorbito dall'anima della sezione.

Da questa considerazione deriva la consuetudine nella pratica di adottare un diagramma della τ costante lungo l'anima della sezione il cui valore viene calcolato semplicemente dividendo il valore del Taglio per l'area dell'anima.

Nel nostro caso se avessimo adottato una tale metodologia avremmo ottenuto il seguente valore costante della τ :

$$\tau = \frac{T}{A_a} = \frac{12 \cdot 10^3}{[(140 - 2 \cdot 5,6) \cdot 4,7]} = 19,82 \text{ MPa}$$

Si noti come il valore calcolato sia in effetti molto prossimo al valore massimo ottenuto con la formula di Jouravski.

Si comprenda inoltre che l'ipotesi di un valore della τ costante lungo tutta l'anima, implica che la verifica nella sezione di attacco ala-anima, seppur di poco, risulti in tal caso più gravosa.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{139,91^2 + 3 \cdot 19,82^2} = 144,06 \text{ MPa}$$

La sollecitazione di Taglio in campo plastico

Per un materiale elastico perfettamente plastico, rimane valido il criterio di resistenza di Hencky – Von Mises, con la limitazione che la tensione ideale massima che produce la plasticizzazione del materiale assume il valore della tensione di snervamento del materiale. In pratica se la sezione è completamente in campo plastico, in ogni punto della sezione la tensione ideale deve uguale pari alla tensione di snervamento:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sigma_s$$

Nel caso di una sollecitazione di Taglio puro in fase plastica, la sola tensione agente è quella tangenziale per la quale, dalla relazione di resistenza appena scritta, si ricava il valore che determina la completa plasticizzazione della sezione.

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{3 \cdot \tau^2} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

Il valore del Taglio ultimo puro della sezione è pari pertanto a:

$$T_u = A \cdot \tau_{\max} = A \cdot \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

dove con A si è indicata l'area della sezione resistente a Taglio.

La verifica a Taglio puro sarà soddisfatta se la sollecitazione di Taglio di progetto risulta inferiore al Taglio resistente ultimo.

$$T_d \leq T_u$$

o ciò che è lo stesso : $\frac{T_u}{T_d} \geq 1$ o anche: $\frac{T_d}{T_u} \leq 1$

Quando non ricorre la condizione in cui il Taglio è l'unica sollecitazione, ma sulla sezione agisce anche la flessione e/o lo sforzo Normale, oltre alle tensioni tangenziali sul materiali saranno presenti anche tensioni assiali. La presenza della tensione tangenziale condiziona la capacità di resistenza del materiale alla tensione assiale, provocando una riduzione del Momento ultimo e/o dello sforzo Normale ultimo della sezione.

Il massimo valore della tensione assiale che si può sviluppare nel materiale in funzione della contemporanea presenza della tensione tangenziale è ricavabile sempre dalla relazione del criterio di resistenza considerando che la tensione ideale massima è la tensione di snervamento.

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \Rightarrow \sigma_s^2 = \sigma^2 + 3 \cdot \tau^2 \Rightarrow \sigma^2 = \sigma_s^2 - 3 \cdot \tau^2$$

In definitiva la massima tensione assiale possibile in presenza di un certo valore di tensione tangenziale è pari a:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_s^2 - 3 \cdot \tau^2}$$

Al variare della tensione tangenziale si ottengono i diversi valori della tensione assiale che risulta disponibile per la resistenza alla flessione e/o allo sforzo Normale.

Per meglio chiarire e porre in pratica quanto ora detto, proviamo a determinare analiticamente l'influenza della sollecitazione di Taglio sulla resistenza ultima flessionale di una sezione in acciaio di tipo IPE.

Nella costruzione del dominio si è ipotizzato che nel caso di flessione retta intorno all'asse Forte, solo l'anima della sezione reagisca alla sollecitazione di Taglio e quindi solo nell'anima si avrà la contemporanea presenza di tensione tangenziale e tensione assiale. Le ali reagiranno esclusivamente a flessione e quindi saranno in grado di espletare sempre la massima tensione assiale senza subire l'influenza del Taglio. L'anima offrirà il suo contributo di resistenza alla flessione secondo la disponibilità di tensione assiale dipendente dalla coesistenza della tensione tangenziale.

In pratica il calcolo del dominio è stato così condotto:

- 1) Si sono calcolati dapprima i valori del Taglio ultimo e del Momento ultimo in condizioni di sollecitazione semplice (per la flessione si utilizzato direttamente il modulo di resistenza plastico fornito dal sagomario, mentre il Taglio ultimo è stato calcolato moltiplicando il valore della τ_{\max} per la sola area dell'anima) ;
- 2) Si sono fissati 10 intervalli di valori della τ compresi da 0 a τ_{\max} ;
- 3) Per ogni valore della τ è stato ricavato attraverso la relazione del criterio di resistenza di Hencky – Von Mises il valore massimo disponibile della σ nell'anima;
- 4) Si è determinato il valore del Taglio moltiplicando il valore assunto della τ per l'area dell'anima;

$$T = \tau \cdot A_a$$

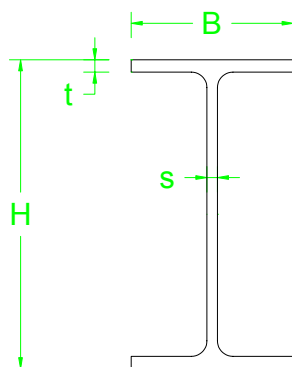
- 5) Si è determinato il momento resistente considerando la riduzione rispetto al momento ultimo nel caso di sollecitazione semplice dovuta alla riduzione della tensione assiale disponibile nell'anima;

$$M_x = M_{ux} - (\sigma_s - \sigma) \cdot A_a \cdot \frac{(H - 2 \cdot t)}{4}$$

- 6) Si sono quindi determinati i parametri di resistenza sotto forma di rapporti con le resistenze ultime in caso di sollecitazione semplice per costruire il dominio di resistenza adimensionalizzato per il tipo di sezione a doppio T analizzato.

Analogo procedimento è stato adottato per la determinazione del dominio di resistenza in presenza di flessione retta agente intorno all'asse debole, considerando però che in tal caso il taglio deve essere assorbito esclusivamente dalle ali.

Si riportano appresso il tabulato dei risultati con i relativi grafici rappresentanti i profili.

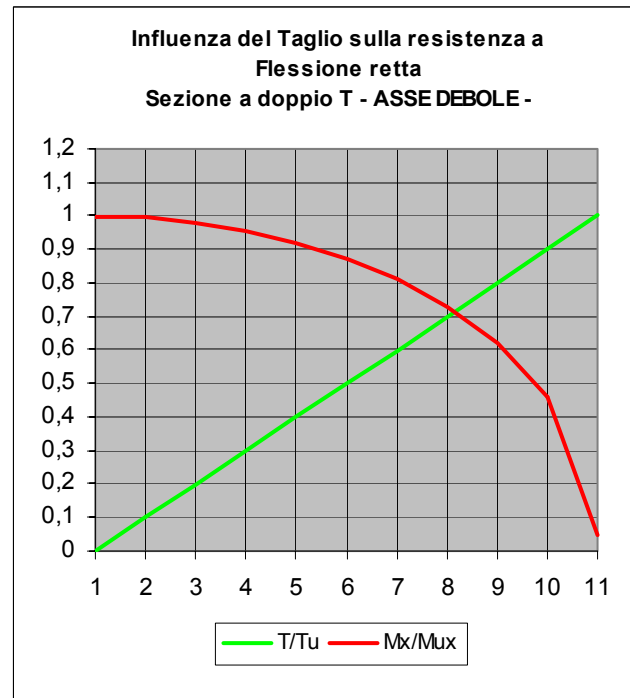
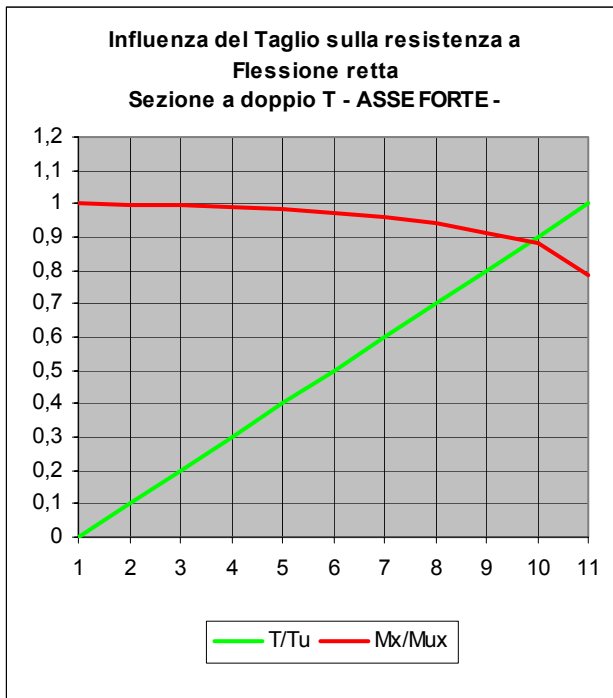


**INFLUENZA DEL TAGLIO SULLA RESISTENZA A FLESSIONE
RETTA - SEZIONE A DOPPIO T -ASSE FORTE-**

τ	T	σ	Mx	T/Tu	Mx/Mux	T/Tu+Mx/Mux
0	0	160,00	35296000	0	1,000	1,000
9,24	9467	159,20	35258398	0,1	0,999	1,099
18,48	18933	156,77	35144438	0,2	0,996	1,196
27,71	28400	152,63	34950473	0,3	0,990	1,290
36,95	37867	146,64	34669735	0,4	0,982	1,382
46,19	47333	138,56	34290985	0,5	0,972	1,472
55,43	56800	128,00	33795693	0,6	0,957	1,557
64,66	66267	114,26	33151632	0,7	0,939	1,639
73,90	75734	96,00	32295386	0,8	0,915	1,715
83,14	85200	69,74	31064308	0,9	0,880	1,780
92,38	94667	0,00	27794464	1	0,787	1,787

**INFLUENZA DEL TAGLIO SULLA RESISTENZA A FLESSIONE
RETTA - SEZIONE A DOPPIO T -ASSE DEBOLE-**

τ	T	σ	My	T/Tu	My/Muy	T/Tu+My/Muy
0	0	160,00	7137600	0	1,000	1,000
9,24	15704	159,20	7103515	0,1	0,995	1,095
18,48	31408	156,77	7000212	0,2	0,981	1,181
27,71	47112	152,63	6824387	0,3	0,956	1,256
36,95	62816	146,64	6569903	0,4	0,920	1,320
46,19	78520	138,56	6226573	0,5	0,872	1,372
55,43	94224	128,00	5777600	0,6	0,809	1,409
64,66	109927	114,26	5193771	0,7	0,728	1,428
73,90	125631	96,00	4417600	0,8	0,619	1,419
83,14	141335	69,74	3301651	0,9	0,463	1,363
92,38	157039	0,00	337600	1	0,047	1,047



Dal raffronto dei due domini di resistenza ottenuti si può vedere come nelle condizioni di flessione retta, la presenza della sollecitazione di Taglio si risenta maggiormente quando il Taglio impegna le ali della sezione e cioè nel caso di flessione retta intorno all'asse debole. Nella condizione di flessione intorno all'asse debole, per ottenere una riduzione di resistenza a flessione pari circa il 10%, si deve avere una sollecitazione di Taglio pari a circa il 50% di quella ultima che comunque risulta essere molto elevata per il fatto che in tale direzione reagiscono a Taglio entrambe le ali.

Se invece la flessione è intorno all'asse forte, la presenza del taglio influenza in maniera minima la resistenza a flessione. Per ottenere una riduzione del 10% della resistenza a flessione occorre la presenza contemporanea di un valore del Taglio pari a circa il 90% del Taglio ultimo resistente della sezione. Per valori del taglio fino al 60% del valore di Taglio ultimo, la riduzione di resistenza a flessione retta risulta inferiore al 5% e pertanto ai fini pratici entro questo campo di valori del Taglio che sollecita la sezione può procedersi senz'altro alla verifica della sezione trascurando l'effetto del Taglio sulla resistenza a flessione.

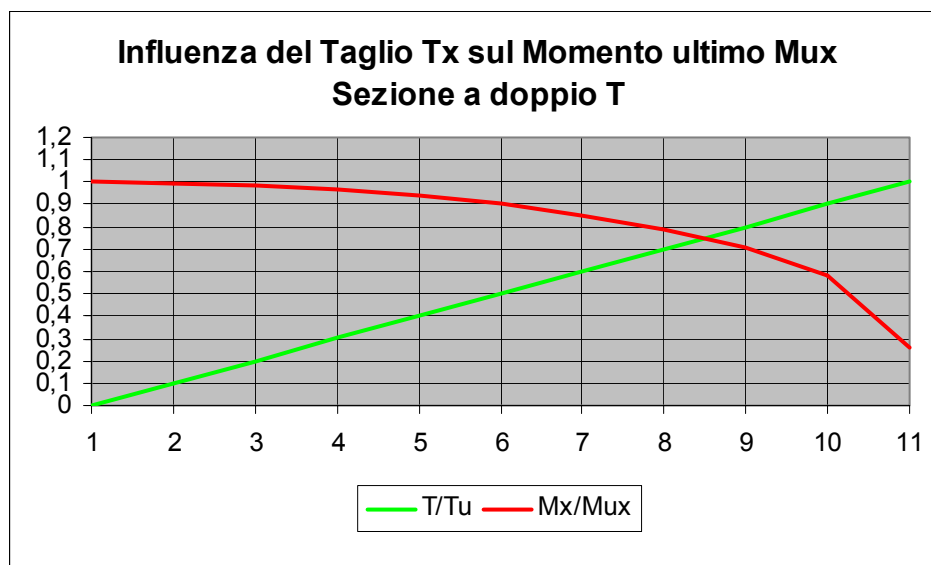
Per poter procedere a verifiche separate a Taglio e flessione con medesima approssimazione quando questi agiscono nella direzione dell'asse debole, si deve avere un valore del Taglio al massimo pari al 30% di quello ultimo.

Nel caso di sollecitazione composta di flessione deviata, sia l'anima che le ali saranno dovranno essere impegnate per resistere alle relative componenti di Taglio. In tal caso mentre risulta senz'altro trascurabile l'influenza del Taglio che viene assorbito dall'anima sul Momento flettente intorno all'asse debole, è da valutare l'influenza della componente di Taglio assorbito dalle ali sul momento resistente ultimo intorno all'asse forte. Il taglio assorbito dalle ali provocherà infatti una diminuzione di tensione assiale disponibile proprio sulle ali la cui area presenta la maggiore distanza dall'asse baricentrico.

Nella tabella e nel grafico che segue, è stata valutata appunto l'influenza del Taglio agente secondo l'asse x (Taglio che impegna le ali) sul momento flettente resistente M_x .

INFLUENZA DEL TAGLIO T_x SUL MOMENTO ULTIMO M_{ux} - SEZIONE A DOPPIO T

	B=	100	mm	SEZ. IPE 200			
	H=	200	mm				
	s=	5,6	mm	$\sigma_s=$	160		
	t=	8,5	mm	$\square s=$	92,37604		
	A ali=	1700	mmq	Wxpl=	220600 mm ³		
	Tu=	157039	N	Mux=	35296000 Nmm		
	τ	T	σ	Mx	T/Tu	Mx/Mux	T/Tu+Mx/Mux
	0	0	160,00	35296000	0	1,000	1,000
	9,24	15704	159,20	35165453	0,1	0,996	1,096
	18,48	31408	156,77	34769804	0,2	0,985	1,185
	27,71	47112	152,63	34096393	0,3	0,966	1,266
	36,95	62816	146,64	33121720	0,4	0,938	1,338
	46,19	78520	138,56	31806766	0,5	0,901	1,401
	55,43	94224	128,00	30087200	0,6	0,852	1,452
	64,66	109927	114,26	27851136	0,7	0,789	1,489
	73,90	125631	96,00	24878400	0,8	0,705	1,505
	83,14	141335	69,74	20604316	0,9	0,584	1,484
	92,38	157039	0,00	9252000	1	0,262	1,262



Si noti che un per avere una riduzione del 5% del Momento ultimo M_x occorre che il Taglio da assorbire con l'area della ali raggiunga circa il 35% della resistenza ultima a Taglio.

E' ovvio che in condizioni di flessione deviata, alla riduzione del momento resistente M_x concorreranno sia il T_y (come nel caso di flessione retta agente intorno all'asse forte) sia T_x , pertanto l'aliquota di riduzione totale della resistenza potrà ottenersi riducendo il momento M_x secondo entrambi i coefficienti riduttivi determinati da T_y e da T_x .

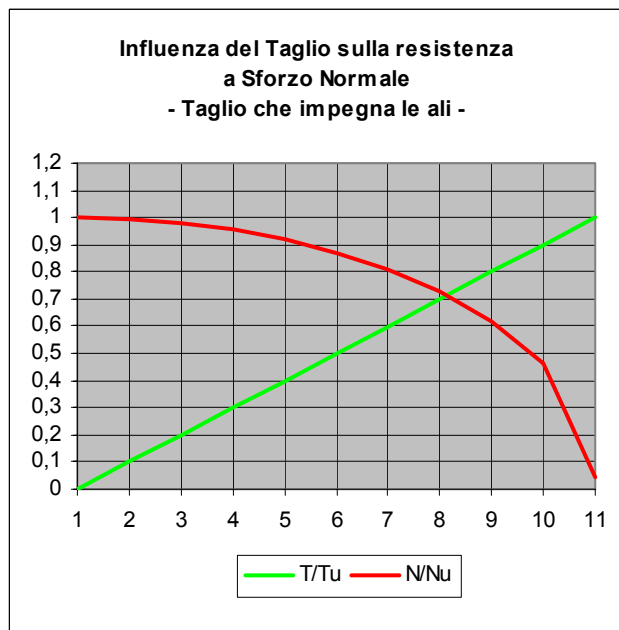
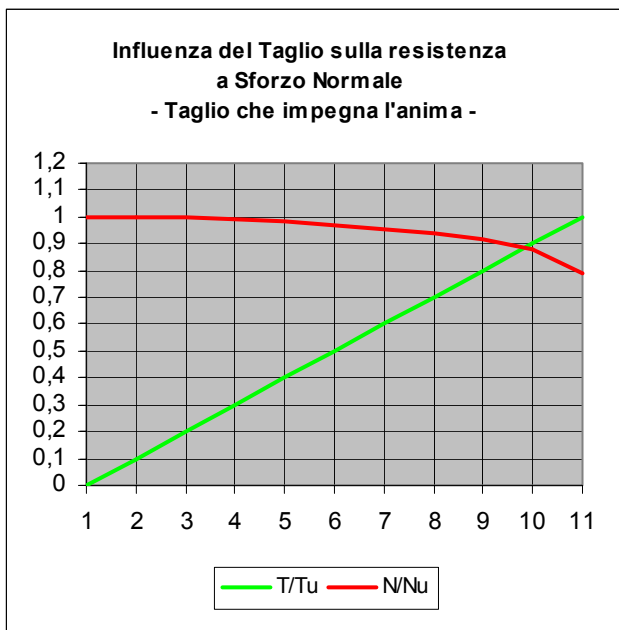
Per esempio, supponiamo di avere sulla sezione una sollecitazione di flessione deviata, in cui l'aliquota il Taglio da assorbire con l'anima T_y , è pari al 40% di quello ultimo e il Taglio da assorbire con le ali T_x , è pari al 20% di quello ultimo. Poiché si può trascurare l'influenza del Taglio T_y sul Momento M_{uy} , la riduzione eventuale da applicare ad M_{uy} sarà quella derivante dalla condizione di flessione retta agente intorno all'asse debole. Dal dominio prima calcolato ricaviamo che per un aliquota di Taglio pari al 20% il Momento ultimo andrà ridotto di circa il 2%. Per quanto attiene alla riduzione da applicare ad M_{ux} , si dovrà invece tener conto dell'influenza di entrambi le componenti di Taglio, pertanto, dal dominio relativo alla flessione retta intorno all'asse forte

ricaviamo che per un aliquota di Taglio T_y pari al 40% la riduzione di M_{ux} è pari a circa il 2%, mentre dal calcolo di influenza di T_x su M_x , si ricava che per un aliquota di T_x pari al 20% il Momento M_{ux} andrà ridotto di circa il 2%. In definitiva il momento resistente ultimo M_{ux} già ridotto del 2% andrà ulteriormente ridotto di un altro 2%: $M_{ux} = 0,98 \cdot 0,98 \cdot M_{ux}$.

In maniera analoga a quanto fatto per la condizione di sollecitazione composta di Taglio e flessione, si sono costruiti i domini di resistenza per la sollecitazione composta di Taglio e Sforzo Normale. La sezione presa a riferimento è stata un HE 200 B (in presenza di prevalenza di sforzo Normale le sezioni tipo HE sono da preferirsi alle sezioni di tipo IPE), e sono state considerate le due possibili direzioni per il Taglio.

INFLUENZA DEL TAGLIO SULLA RESISTENZA A SFORZO NORMALE - SEZIONE A DOPPIO T - Taglio secondo l'anima

B=	200	mm					SEZ. HE 200 B
H=	200	mm					
s=	9	mm					$\sigma_s =$ 160
t=	15	mm					$\tau_s =$ 92,37604
A anima=	1530	mmq					A Totale= 7808 mm ²
Tu=	141335	N					N= 1249280 N
τ	T	σ	N	T/Tu	N/Nu	T/Tu+Mx/Mux	
0	0	160,00	1249280	0	1,000	1,000	
9,24	14134	159,20	1248053	0,1	0,999	1,099	
18,48	28267	156,77	1244334	0,2	0,996	1,196	
27,71	42401	152,63	1238004	0,3	0,991	1,291	
36,95	56534	146,64	1228843	0,4	0,984	1,384	
46,19	70668	138,56	1216483	0,5	0,974	1,474	
55,43	84801	128,00	1200320	0,6	0,961	1,561	
64,66	98935	114,26	1179302	0,7	0,944	1,644	
73,90	113068	96,00	1151360	0,8	0,922	1,722	
83,14	127202	69,74	1111186	0,9	0,889	1,789	
92,38	141335	0,00	1004480	1	0,804	1,804	



INFLUENZA DEL TAGLIO SULLA RESISTENZA A SFORZO NORMALE - SEZIONE A DOPPIO T - Taglio secondo le ali

τ	T	σ	N	T/Tu	N/Nu	T/Tu+N/Nu
0	0	160,00	1249280	0	1,000	1,000
9,24	55426	159,20	1244468	0,1	0,996	1,096
18,48	110851	156,77	1229884	0,2	0,984	1,184
27,71	166277	152,63	1205062	0,3	0,965	1,265
36,95	221703	146,64	1169135	0,4	0,936	1,336
46,19	277128	138,56	1120664	0,5	0,897	1,397
55,43	332554	128,00	1057280	0,6	0,846	1,446
64,66	387979	114,26	974857	0,7	0,780	1,480
73,90	443405	96,00	865280	0,8	0,693	1,493
83,14	498831	69,74	707734	0,9	0,567	1,467
92,38	554256	0,00	289280	1	0,232	1,232

Anche nel caso di sollecitazione composta di Taglio e Sforzo Normale si evidenzia che la presenza del Taglio influenza maggiormente la resistenza a Sforzo Normale quando agisce nella direzione dell'asse debole. In tal caso per sollecitazioni di Taglio superiori al 30% del Taglio ultimo va considerata la riduzione di capacità di resistenza allo sforzo Normale.

Se il taglio agisce nella direzione dell'asse forte, l'influenza del Taglio si risente molto meno, occorrendo una sollecitazione di Taglio pari a circa il 70% di quella ultima per ridurre del 5% la capacità portante della sezione a sforzo Normale.

Seppur si è qui analizzato il caso di sollecitazione composta di Taglio e Sforzo Normale, combinazione che nella pratica può presentarsi in alcuni giunti strutturali metallici, nelle travi, la sollecitazione di Taglio si accompagna sempre alla flessione, e quindi oltre alla influenza del Taglio sulla portanza a sforzo Normale andrebbe considerata anche la corrispondente riduzione sulla resistenza flessionale. Con una certa approssimazione si potrà valutare la riduzioni di portanza dovuta al Taglio considerando separatamente gli accoppiamenti di Taglio e Sforzo Normale per la riduzione di resistenza a sforzo Normale e di Taglio e flessione per la riduzione di resistenza a flessione. Con tali resistenze ridotte potrà poi effettuarsi la verifica utilizzando il dominio adimensionalizzato per la sollecitazione di presso-tenso flessione.

Nella maggioranza dei casi pratici, potrà però lecitamente ipotizzarsi che la sollecitazione di Taglio non influenzi in maniera significativa la resistenza delle sezioni nei riguardi delle altre sollecitazioni, e si potrà quindi procedere alle verifiche della sezione senza portare in conto la sollecitazione di Taglio.

Esempi applicativi

Esercizio 1)

Riconsideriamo la mensola di luce pari a m 2,00, già progettata con il metodo delle tensioni ammissibili; considerando i carichi caratteristici suddivisi tra permanenti e variabili sono nell'ordine $g=3,5$ KN/m e $q=2,5$ KN/m, progettare la struttura attraverso il metodo semiprobabilistico agli stati limite adottando una sezione tipo IPE realizzata di acciaio Fe 360.

Per calcolare le caratteristiche della sollecitazione di progetto allo stato limite ultimo, occorre considerare la seguente combinazione dei carichi:

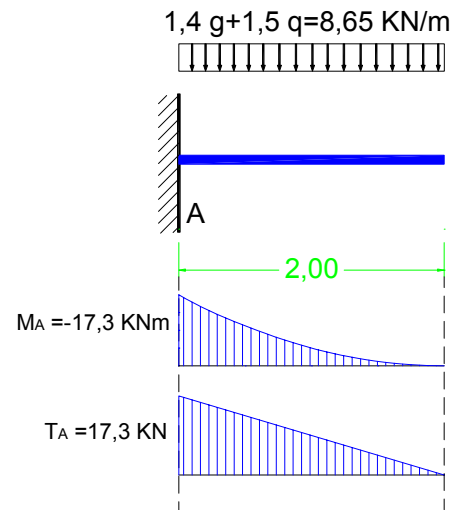
$$1,4 \cdot G + 1,5 \cdot Q = 1,4 \cdot 3,5 + 1,5 \cdot 2,5 = 8,65 \text{ KN/m}$$

Con tale valore del carico sulla mensola nella sezione di incastro si determinano i seguenti valori del Momento flettente e del Taglio.

$$M = \frac{q \cdot l^2}{2} = \frac{8,65 \cdot 2,00^2}{2} = 17,3 \text{ KNm}$$

$$T = q \cdot l = 8,65 \cdot 2,00 = 17,3 \text{ KN}$$

Progettiamo la sezione considerando la sola sollecitazione di flessione, mentre nella fase di verifica considereremo l'azione contemporanea del Taglio e della Flessione.



Fase di progetto

L'acciaio Fe 360 presenta una tensione di snervamento caratteristica pari a $f_{yk} = 235$ MPa

La tensione di progetto si ottiene dividendo la tensione di snervamento caratteristica per il coefficiente di sicurezza del materiale.

$$\sigma_d = \frac{f_{yk}}{\gamma_m} = \frac{235}{1,05} = 223,8 \text{ MPa}$$

Con il momento flettente di progetto determiniamo il modulo di resistenza plastico della sezione:

$$W_{plx} = \frac{M_d}{\sigma_d} = \frac{17,3 \cdot 10^6}{223,8} = 77301 \text{ mm}^3 = 77,301 \text{ cm}^3$$

Dal sagomario ricaviamo la sezione IPE che presenta il modulo di resistenza plastico immediatamente superiore a quello di progetto. La sezione IPE 140 ha un modulo di resistenza plastico relativo all'asse forte pari a $88,34$ cm³.

Fase di verifica

Per procedere alla verifica della sezione adottata, procediamo al calcolo del Momento resistente ultimo a Flessione semplice e del Taglio ultimo nella condizione di Taglio semplice.

Per la determinazione del Taglio ultimo valutiamo la tensione tangenziale massima possibile in assenza di tensione assiale e la consideriamo applicata sull'area dell'anima della sezione.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_d}{\sqrt{3}} = \frac{223,8}{\sqrt{3}} = 129,2 \text{ MPa}$$

$$A_a = 4,7 \cdot (140 - 2 \cdot 6,9) = 593,14 \text{ mm}^2$$

$$T_u = \tau_{\max} \cdot A_a = 129,2 \cdot 593,14 \cong 76634 \text{ N} = 76,634 \text{ KN}$$

Il Taglio di progetto a cui è soggetto la sezione è minore del Taglio ultimo e quindi la sezione risulta verificata nei riguardi della sollecitazione di Taglio.

Per valutare l'influenza della sollecitazione di Taglio nei riguardi della resistenza a flessione della sezione, valutiamo l'aliquota di utilizzo della sezione al Taglio.

$$\frac{T_d}{T_u} = \frac{17,3}{76,634} \cong 0,23$$

Dai domini di resistenza adimensionalizzati a flessione e Taglio secondo l'asse forte della trave, si ricava che con tale aliquota di sollecitazione di Taglio rispetto al Taglio ultimo, la resistenza a flessione si riduce solo dell' 1% circa e quindi possiamo procedere alla verifica a flessione senza tener conto della contemporanea presenza della sollecitazione di Taglio.

$$M_{ux} = W_{plx} \cdot \sigma_d = 88,34 \cdot 10^3 \cdot 223,8 = 19770492 \text{ Nmm} \cong 19,77 \text{ KNm}$$

$$\frac{M_u}{M_d} = \frac{19,77}{17,3} = 1,14 > 1$$

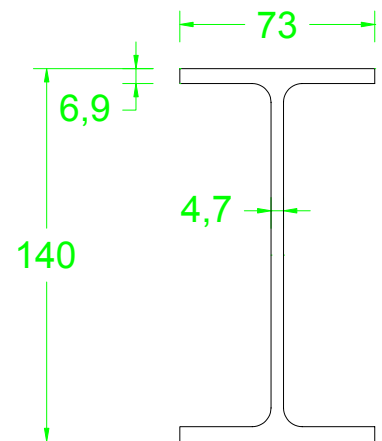
La verifica è soddisfatta.

Se avessimo voluto tener conto della riduzione di resistenza a flessione dovuta alla presenza della sollecitazione di Taglio avremmo dovuto considerare il seguente Momento resistente ultimo.

$$M_u = (1 - 1\%) \cdot M_{ux} = 0,99 \cdot 19,77 = 19,57 \text{ KNm}$$

$$\frac{M_u}{M_d} = \frac{19,57}{17,3} = 1,13 > 1$$

La verifica risulta comunque soddisfatta.



Esercizio 2)

Attraverso il metodo agli S.L.U. si progetti la sezione in acciaio Fe 360, tipo IPE, idonea per la realizzazione della trave riportata in figura caricata da 3 Forze verticali di cui la componente permanente è pari a 5,4 KN e la componente variabile è pari a 10,8 KN.

L'esercizio qui proposto è in realtà quello che è già stato trattato quanto abbiamo affrontato il problema della sollecitazione composta di flessione e sforzo Normale. In quella sede però non abbiamo tenuto conto che sulla trave e quindi sulle sezioni verificate, risulta presente anche la sollecitazione di Taglio. Questa volta terremo conto nelle verifiche di tutte le caratteristiche di sollecitazione agenti nelle sezioni e valuteremo, laddove necessario, l'eventuale influenza della sollecitazione di Taglio sulle resistenze flessionali e a sforzo Normale.

Per facilitare la lettura e la comprensione, l'esercizio sarà qui svolto daccapo e nella sua interezza, riportando anche i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.

Per il metodo allo Stato limite ultimo, i carichi vanno combinati secondo la seguente espressione convenzionale.

$$1,4 \cdot G + 1,5 \cdot Q$$

Nel caso specifico si ha:

$$F = 1,4 \cdot 5,4 + 1,5 \cdot 10,8 = 23,76 \text{ KN}$$

Ogni singola forza va ora scomposta secondo la direzione parallela all'asse della trave e secondo la direzione perpendicolare all'asse della trave.

$$F_x = F \cdot \sin 16,7 = 23,76 \cdot \sin 16,7 = 6,83 \text{ KN}$$

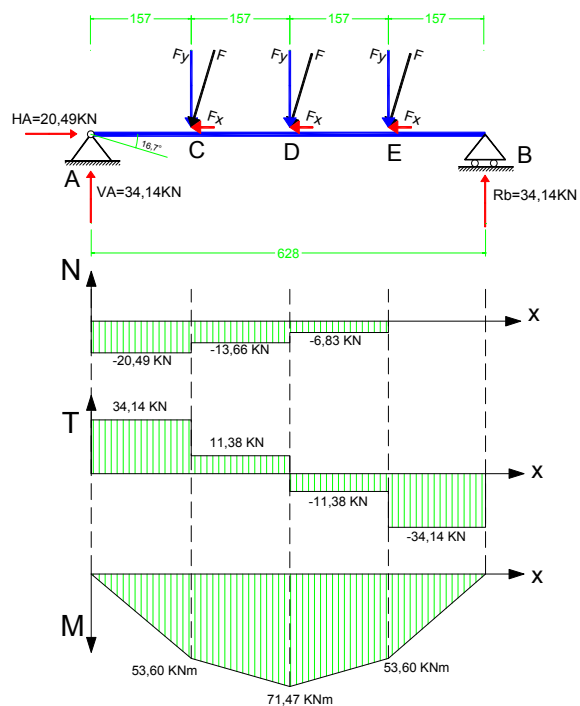
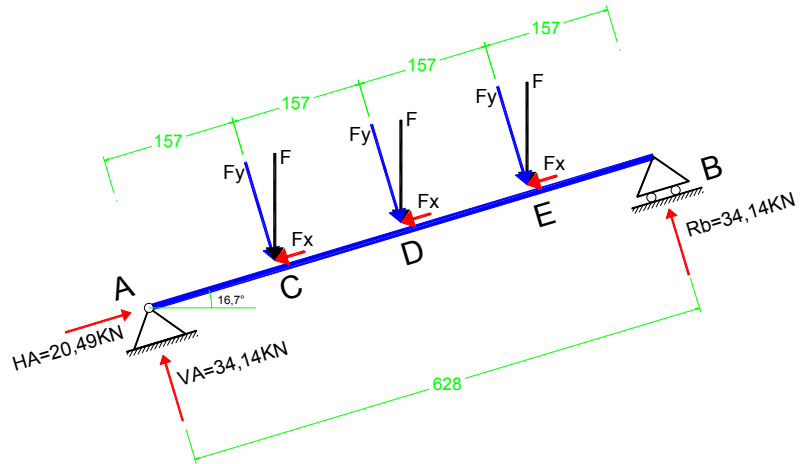
$$F_y = F \cdot \cos 16,7 = 23,76 \cdot \cos 16,7 = 22,76 \text{ KN}$$

Le reazioni vincolari sono facilmente ricavabili nel modo seguente:

$$H_A = 3 \cdot F_x = 3 \cdot 6,83 = 20,49 \text{ KN}$$

$$V_A = R_B = \frac{3 \cdot F_y}{2} = \frac{3 \cdot 22,76}{2} = 34,14 \text{ KN}$$

Determiniamo le caratteristiche della sollecitazione.



$$N_A = N_C^s = -H_A = -20,49 \text{ KN}$$

$$N_C^d = N_D^s = N_C^s + F_x = -20,49 + 6,83 = -13,66 \text{ KN}$$

$$N_D^d = N_E^s = N_D^s + F_x = -13,66 + 6,83 = -6,83 \text{ KN}$$

$$N_E^d = N_B = N_E^s + F_x = -6,83 + 6,83 = 0 \text{ KN}$$

$$T_A = T_C^s = V_A = 34,14 \text{ KN}$$

$$T_C^d = T_D^s = T_C^s - F_y = 34,14 - 22,76 = 11,38 \text{ KN}$$

$$T_D^d = T_E^s = T_D^s - F_y = 11,38 - 22,76 = -11,38 \text{ KN}$$

$$T_E^d = T_B = T_E^s - F_y = -11,38 - 22,76 = -34,14 \text{ KN}$$

$$M_A = 0$$

$$M_C = T_A \cdot 1,57 = 34,14 \cdot 1,57 = 53,5998 \text{ KNm}$$

$$M_D = M_C + T_C^d \cdot 1,57 = 53,5998 + 11,38 \cdot 1,57 = 71,4664 \text{ KNm}$$

$$M_E = M_D + T_D^d \cdot 1,57 = 71,4664 - 11,38 \cdot 1,57 = 53,5998 \text{ KNm}$$

$$M_B = 0$$

Per comodità di spazio, i diagrammi sono riportati in figura sulla struttura “raddrizzata”.

I punti strutturali da prendere in considerazione per il progetto e la verifica della sezione da utilizzare per la realizzazione della trave sono: La sezione di mezzeria nella quale si registra il massimo valore del Momento Flettente; La sezione individuata dalla lettera C, dove il massimo valore di sforzo Normale e il massimo valore del Taglio che si registra anche nella sezione di appoggio A, agiscono contemporaneamente alla sollecitazione di flessione.

Le combinazioni di valori delle caratteristiche della sollecitazione da considerare sono quindi le seguenti:

Sezione D: $M_d = 71,47 \text{ KNm}; \quad N_d = 13,66 \text{ KN}; \quad T_d = 11,38 \text{ KN}$

Sezione C: $M_d = 53,60 \text{ KNm}; \quad N_d = 20,49 \text{ KN}; \quad T_d = 34,14 \text{ KN}$

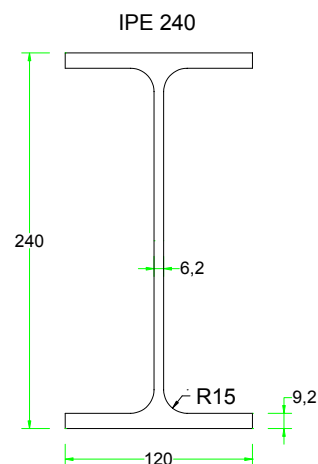
Effettuiamo il progetto della sezione considerando dapprima la sola sollecitazione flessionale.

$$\sigma_d = \frac{f_y}{\gamma_m} = \frac{235}{1,05} = 223,8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_d}{\sqrt{3}} = \frac{223,8}{\sqrt{3}} = 129,2 \text{ MPa}$$

Il modulo di resistenza plastica della sezione di progetto è:

$$W_{plx} = \frac{M_d}{\sigma_d} = \frac{71,466 \cdot 10^6}{223,8} = 319,330 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 319,33 \text{ cm}^3$$



Dal sagomario ricaviamo la sezione IPE 240 la quale presenta le seguenti caratteristiche meccaniche:

$$A = 39,12 \text{ cm}^2; \quad W_{plx} = 366,6 \text{ cm}^3$$

L'area dell'anima della trave vale:

$$A_a = 6,2 \cdot (240 - 2 \cdot 9,8) = 1366,48 \text{ mm}^2 \cong 13,66 \text{ cm}^2$$

Per procedere alle verifiche determiniamo dapprima le caratteristiche di resistenza ultime della sezione nelle condizioni di sollecitazione semplice.

$$N_u = A \cdot \sigma_d = 39,12 \cdot 10^2 \cdot 223,8 = 875506 \text{ N} = 875,506 \text{ KN}$$

$$M_u = W_{plx} \cdot \sigma_d = 366,6 \cdot 10^3 \cdot 223,8 = 82045080 \text{ Nmm} \cong 82,045 \text{ KNm}$$

$$T_u = A_a \cdot \tau_{\max} = 13,66 \cdot 10^2 \cdot 129,2 = 176487,2 \text{ N} \cong 176,49 \text{ KN}$$

Verifica con i valori delle caratteristiche della sollecitazione di progetto della sezione C.

$$\frac{T_d}{T_u} = \frac{11,38}{176,49} = 0,06$$

Tale aliquota di sollecitazione di Taglio, rende assolutamente trascurabile (< 1%) la riduzione di resistenza della sezione sia a flessione sia a sforzo Normale, pertanto si procede alla verifica a presso flessione della sezione senza considerare la presenza della sollecitazione di Taglio.

$$\frac{N_d}{N_u} + \frac{M_d}{M_u} = \frac{13,66}{875,506} + \frac{71,47}{82,045} \cong 0,89 < 1$$

La sezione è verificata.

Si noti che in realtà nella verifica della sezione si sarebbe potuto trascurare anche la sollecitazione di sforzo Normale, la quale impegnando la relativa resistenza della sezione per un aliquota inferiore al 10% risulta di fatto assolutamente trascurabile.

$$\frac{N_d}{N_u} = \frac{13,66}{875,506} = 0,016 = 1,6\%$$

Verifica con i valori delle caratteristiche della sollecitazione di progetto della sezione D.

Effettuiamo la verifica a Taglio determinando l'aliquota di resistenza a Taglio sfruttata della sezione.

$$\frac{T_d}{T_u} = \frac{34,14}{176,49} = 0,19$$

L'aliquota di resistenza a Taglio sfruttata dalla sezione risulta assolutamente ininfluenza per la resistenza a flessione della sezione e comporterebbe una riduzione del 2% circa della resistenza a

sforzo Normale e che pur essendo anch'essa trascurabile portiamo in conto per completezza di procedura.

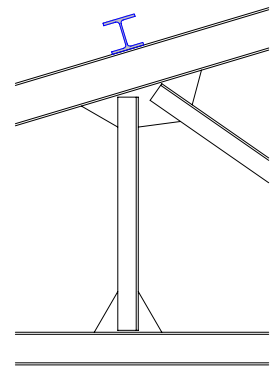
$$\frac{N_d}{0,98 \cdot N_u} + \frac{M_d}{M_u} = \frac{20,49}{0,98 \cdot 875,506} + \frac{53,60}{82,045} = 0,024 + 0,653 = 0,677$$

La sezione è verificata.

Si noti che anche in questa sezione poteva trascurarsi la presenza dello sforzo Normale in quanto pur tenendo conto della riduzione di resistenza dovuta alla presenza del taglio, impegna un'aliquota di resistenza inferiore al 10%.

Esercizio 3)

Si vuole progettare una trave di copertura in acciaio poggiante su capriate principali distanti tra loro di m 5 ed aventi la linea di colmo che determina una pendenza trasversale del 30%. Sulla trave oggetto del calcolo agiscono secondo un asse di sollecitazione verticale, un carico permanente uniformemente distribuito pari a 1,875 KN/m ed un carico variabile pari a 3,75 KN/m.



Come ultimo esempio si ripropone qui il progetto dell'arcareccio già trattato nel capitolo della flessione deviata.

In questo caso ipotizzeremo per la trave un diverso schema strutturale invece della trave semplicemente appoggiata così come considerato nell'esercizio già svolto.

Confideremo la trave continua e appoggiata su 3 capriate, ottenendo così lo schema strutturale di una trave continua a due campate di luce uguale.

Per una trave di questo tipo, si ottiene che il momento flettente massimo si verifica in corrispondenza dell'appoggio centrale con segno algebrico negativo e con valore pari a:

$$M_{\max} = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

Si verifica cioè che con lo schema strutturale ipotizzato, il momento flettente massimo risulta in modulo pari a quello che si avrebbe sulla trave semplicemente appoggiata di pari luce, ma il fatto che si verifica non nella mezzeria della campata ma sull'appoggio centrale, comporta che tale valore del Momento flettente si verifica in contemporanea ad un valore del Taglio che risulterà pari in formula a:

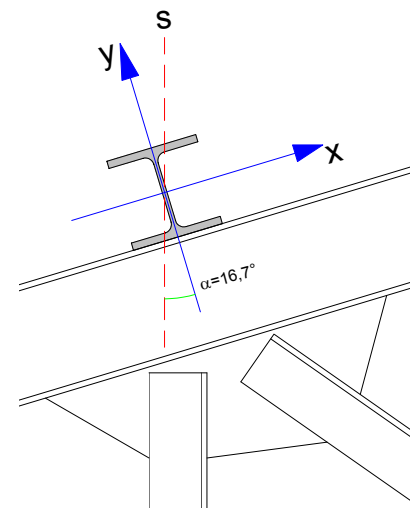
$$T_{\max} = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l$$

Con questa ipotesi strutturale la sezione da progettare risulta così sollecitata:

$$q = 1,4 \cdot G + 1,5 \cdot Q = 1,4 \cdot 1,875 + 1,5 \cdot 3,75 = 8,25 \text{ KN / m}$$

$$M_d = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{8,25 \cdot 5^2}{8} = 25,781 \text{ KNm}$$

$$T_d = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l = \frac{5}{8} \cdot 8,25 \cdot 5 = 25,78 \text{ KN}$$



Considerando l'inclinazione della sezione rispetto alla direzione di sollecitazione che risulta verticale, le sollecitazioni di progetto hanno le seguenti componenti rispetto alle direzioni principali della sezione.

$$\alpha = \arctg(0,30) = 16,7^\circ$$

$$M_x = M_{\max} \cdot \cos \alpha = 25,781 \cdot \cos 16,7^\circ = 24,694 \text{ KNm}$$

$$M_y = M_{\max} \cdot \sin \alpha = 25,781 \cdot \sin 16,7^\circ = 7,408 \text{ KNm}$$

$$T_{dx} = T_d \cdot \sin \alpha = 25,78 \cdot \sin 16,7^\circ = 7,41 \text{ KN}$$

$$T_{dy} = T_d \cdot \cos \alpha = 25,78 \cdot \cos 16,7^\circ = 24,69 \text{ KN}$$

La sezione risulta sollecitata a flessione deviata e a Taglio agente su entrambe le direzioni principali.

L'acciaio Fe 360 possiede una tensione di snervamento caratteristica f_{yk} pari a 235MPa alla quale applicando il coefficiente di sicurezza sul materiale $\gamma_m = 1,05$ comporta una tensione di progetto pari a:

$$\sigma_d = \frac{f_{yk}}{\gamma_m} = \frac{235}{1,05} = 223,8 \text{ MPa} \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_d}{\sqrt{3}} = \frac{223,8}{\sqrt{3}} = 129,2 \text{ MPa}$$

Fase di progetto

Per i profili tipo HE B si può assumere il rapporto tra i moduli di resistenza plastici $K=2,14$, ottenendo così il seguente modulo di resistenza plastico richiesto dalle sollecitazioni di progetto.

$$W_{plx} = \frac{M_{dx} + K \cdot M_{dy}}{\sigma_d} = \frac{(24,694 + 2,14 \cdot 7,408) \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{223,8 \text{ MPa}} = 181,176 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 181,176 \text{ cm}^3$$

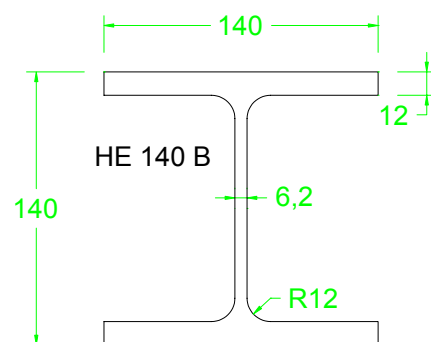
Dal sagomario si ricava la sezione HE 140 B la quale possiede i seguenti moduli di resistenza plastici:

$$W_{plx} = 245,4 \text{ cm}^3; \quad W_{ply} = 119,8 \text{ cm}^3$$

L'area dell'anima e l'area delle ali della sezione sono:

$$A_a = 6,2 \cdot (140 - 2 \cdot 12) = 719,2 \text{ mm}^2$$

$$A_{ali} = 2 \cdot 140 \cdot 12 = 3360 \text{ mm}^2$$



Le caratteristiche di resistenza ultime della sezione in condizioni di sollecitazione semplice sono:

$$M_{ux} = W_{plx} \cdot \sigma_d = 245,4 \cdot 10^3 \cdot 223,8 = 54,92 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 54,92 \text{ KNm}$$

$$M_{uy} = W_{ply} \cdot \sigma_d = 119,8 \cdot 10^3 \cdot 223,8 = 26,81 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 26,81 \text{ KNm}$$

$$T_{uy} = A_a \cdot \tau_{\max} = 719,2 \cdot 129,2 = 92,920 \cdot 10^3 \text{ N} = 92,92 \text{ KN}$$

$$T_{ux} = A_{ali} \cdot \tau_{\max} = 3360 \cdot 129,2 = 434,11 \cdot 10^3 \text{ N} = 434,11 \text{ KN}$$

Effettuiamo dapprima la verifica alla sollecitazione di Taglio determinando le corrispondenti aliquote di sollecitazione rispetto alla resistenza ultima della sezione.

$$\frac{T_{dx}}{T_{ux}} = \frac{7,41}{434,11} = 0,017 \qquad \frac{T_{dy}}{T_{uy}} = \frac{24,69}{92,92} = 0,266$$

Con le aliquote calcolate determiniamo dai domini di resistenza a flessione e taglio l'eventuale riduzione della resistenza a flessione della sezione dovuta alla presenza contemporanea del Taglio.

Il Taglio in direzione **x** va considerato accoppiato al Momento flettente **My**. La sollecitazione impegna l'asse debole della sezione, e la sollecitazione di Taglio sfrutta solo circa il 2% della resistenza ultima essendo pertanto praticamente ininfluenza sulla resistenza a flessione ultima **Muy**.

Secondo l'asse forte della sezione agisce invece un Taglio **Ty** che utilizza circa il 27% della resistenza a Taglio della sezione in tale direzione. Dal dominio a taglio e flessione agente secondo l'asse forte si ricava che la riduzione di resistenza della sezione nei riguardi del Momento flettente **Mx** per effetto della sollecitazione di Taglio risulterebbe appena del 1% e quindi in pratica certamente trascurabile. Non viene considerata nel calcolo alcuna riduzione del Momento **Mx** per effetto della esigua aliquota di Taglio **Tx** (<2%).

Nonostante in entrambe le direzioni la sollecitazione di Taglio può considerarsi praticamente ininfluenza rispetto alla resistenza a flessione della sezione, si procederà alla verifica a flessione deviata della sezione considerando la riduzione dell' 1% della resistenza ultima a flessione intorno all'asse **x** dovuta al Taglio agente secondo l'asse **y**.

$$\frac{M_{dx}}{0,99 \cdot M_{ux}} + \frac{M_{dy}}{M_{uy}} = \frac{24,694}{0,99 \cdot 54,92} + \frac{7,408}{26,81} = 0,454 + 0,276 = 0,73$$

La sezione risulta verificata.

Anche in questo caso si sarebbe potuto trascurare completamente la sollecitazione di Taglio nelle verifiche.

La sollecitazione di Torsione

Si ha sollecitazione di torsione in una trave quando la risultante delle Forze esterne nella sezione considerata, è una forza che non passa per l'asse geometrico z della trave. In realtà se la sezione costituente la trave non ha entrambi gli assi principali che siano anche assi di simmetria, l'asse rispetto al quale si determina la Torsione, non coincide con l'asse geometrico (baricentrico) della trave, ma con un asse parallelo a questo passante per un punto particolare detto centro di Taglio. Poiché ci limiteremo qui a studiare gli effetti della torsione su due particolari sezioni, circolare e rettangolare, entro i limiti di questa trattazione possiamo affermare che il cosiddetto centro di Taglio coincide con il baricentro della sezione, e quindi avremo sollecitazione di torsione quando la risultante delle forze esterne applicata nel piano della sezione, presenterà un'eccentricità rispetto al baricentro.

La trattazione della sollecitazione di torsione, così come del Taglio, non è cosa semplice, e la soluzione di tipo teorica può essere ottenuta solo per particolari tipi di sezioni tipo quella circolare, mentre per altre sezioni si possono ottenere risultati numerici approssimati che comunque risultano di pratico utilizzo.

Noi ci limiteremo a trattare la torsione applicata ad un tronco di trave di sezione circolare e forniremo poi le soluzioni per la sezione circolare cava (corona circolare) e per quella rettangolare.

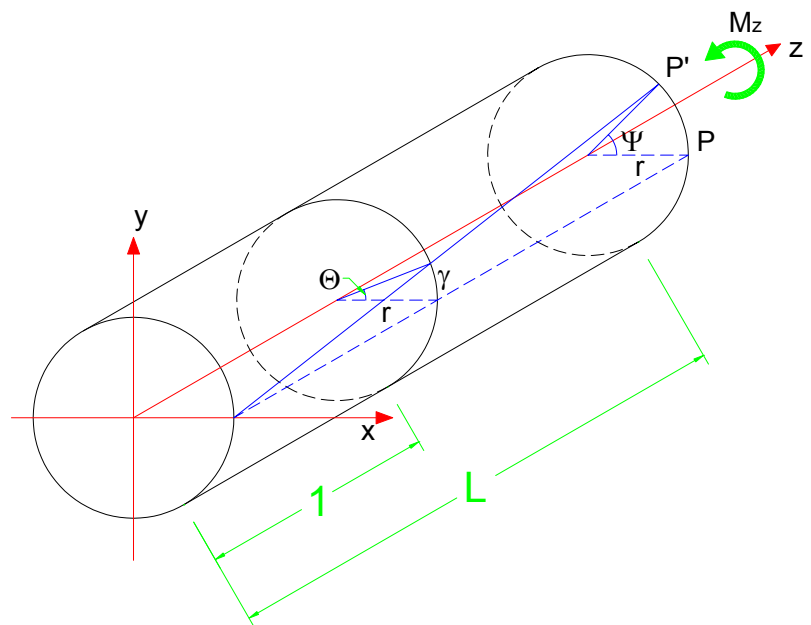
Consideriamo quindi un tronco di trave di sezione circolare e di lunghezza L molto piccola così da poter considerare trascurabile il peso proprio della trave. Consideriamo che sul tronco di trave considerato agisca esclusivamente un Momento torcente M_z . Per l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, per effetto del Momento torcente applicato le sezioni costituenti il tronco di trave ruoteranno intorno all'asse z della trave mantenendosi piane. Lungo l'asse z non si avrà alcuna deformazione e risulterà pertanto nulla la ϵ_z e quindi sia ϵ_x sia ϵ_y . Le uniche componenti di deformazione non nulle saranno gli scorrimenti γ_{zx} e γ_{zy} .

Per effetto dello scorrimento nella sezione terminale a distanza L , il punto P assume la posizione P' corrispondente alla rotazione totale di un angolo Ψ rispetto alla sezione iniziale del tronco. La rotazione totale Ψ in effetti è pari alla rotazione Θ del tronco di lunghezza unitaria moltiplicata la lunghezza L del tronco considerato:

$$\Psi = \Theta \cdot L \quad \Rightarrow \quad \Theta = \frac{\Psi}{L}$$

L'angolo Θ è detto angolo unitario di torsione.

Lo scorrimento totale $\overline{PP'}$ diviso per la lunghezza L del tronco ci fornisce lo scorrimento per unità di lunghezza corrispondente allo scorrimento del tronco di lunghezza unitaria.



$$\gamma = \frac{\overline{PP'}}{L}$$

Lo scorrimento unitario γ può ottenersi anche come prodotto dell'angolo di torsione unitaria espresso in radianti per il raggio r della sezione circolare.

$$\gamma = \Theta \cdot r$$

Ovviamente al variare di r , si ottengono diversi valori di γ sottesi allo stesso angolo Θ , per cui tutti i punti della sezione posti alla stessa distanza polare dal centro avranno lo stesso scorrimento e i punti posti lungo la circonferenza presenteranno il massimo valore di scorrimento.

Consideriamo ora una areola piccolissima sulla sezione posta alla distanza polare r_i . Tale areola sarà soggetta allo scorrimento γ_i dipendente dall'angolo unitario di torsione Θ e dalla distanza dal centro di Torsione r_i .

$$\gamma_i = \Theta \cdot r_i$$

Per la legge di Hooke su tale areola per effetto dello scorrimento a cui è sottoposta, scaturisce una tensione tangenziale determinabile con l'espressione che segue:

$$\tau_i = G \cdot \gamma_i = G \cdot \Theta \cdot r_i$$

essendo G il modulo di elasticità tangenziale.

$$G = \frac{E}{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$$

La forza scaturente dal prodotto della tensione tangenziale τ_i per l'area a_i dell'areola considerata, determina un momento intorno al baricentro della sezione pari a:

$$M_i = \tau_i \cdot a_i \cdot r_i = G \cdot \Theta \cdot a_i \cdot r_i^2$$

Se consideriamo di suddividere la sezione in tante areole piccolissime per ognuna di esse potremo determinare un diverso momento M_i .

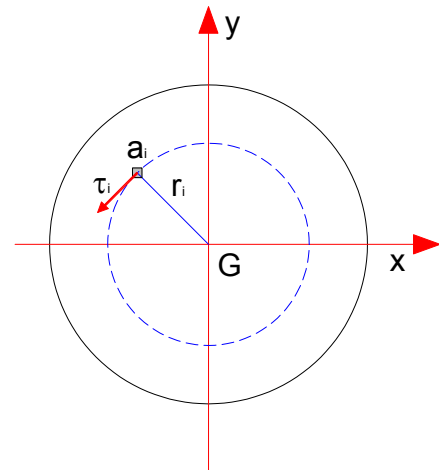
Per l'equilibrio della sezione, la somma di tutti i Momenti M_i determinati dalla tensioni tangenziali agenti sulle singole areole dovrà eguagliare il momento torcente M_z agente sulla sezione, e cioè:

$$M_z = \sum M_i = G \cdot \Theta \cdot \sum a_i \cdot r_i^2$$

Il termine nella sommatoria altro non è che il momento d'inerzia polare della sezione rispetto al baricentro G e quindi può scriversi che:

$$M_z = G \cdot \Theta \cdot J_p$$

Dall'espressione appena ricavata si determina l'angolo unitario di torsione che sostituito nell'espressione della τ ci consente di scrivere l'espressione per il calcolo della tensione tangenziale al variare della distanza polare r .



$$\Theta = \frac{M_z}{G \cdot J_p}$$

$$\tau = G \cdot \Theta \cdot r$$

$$\tau = G \cdot \frac{M_z}{G \cdot J_p} \cdot r \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{M_z}{J_p} \cdot r$$

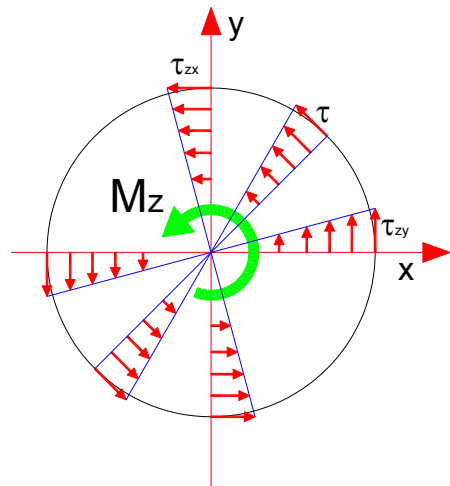
Per il calcolo del valore massimo della tensione tangenziale si dovrà porre la distanza polare r pari proprio al raggio della sezione circolare, quindi, considerato che :

$$J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \quad \text{si ha che} \quad \tau_{\max} = \frac{M_z}{\frac{\pi \cdot D^4}{32}} \cdot \frac{D}{2} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{16 \cdot M_z}{\pi \cdot D^3}$$

La tensione tangenziale varia linearmente lungo il diametro della sezione circolare, è diretta perpendicolarmente al diametro considerato e raggiunge il suo valore massimo all'estremità del diametro. Su un diametro generico la tensione tangenziale può essere scomposta secondo le due direzioni principali, ma in corrispondenza dei diametri giacenti sull'asse principale x e sull'asse principale y della sezione si ottengono rispettivamente i massimi valori di τ_{zy} e di τ_{zx} .

In concomitanza di sollecitazione di Taglio e torsione, la tensione tangenziale massima dovuta alla torsione va a sommarsi alla tensione tangenziale massima dovuta al Taglio.

La verifica in condizioni di sollecitazione semplice di torsione si effettua verificando che la tensione tangenziale massima sia inferiore alla tensione tangenziale ammissibile. Nel caso di sollecitazione composta, la tensione tangenziale da considerare sarà data dalla somma di quella dovuta al Taglio con quella da torsione; se in presenza anche di tensione assiale, dovrà determinarsi la tensione ideale utilizzando un appropriato criterio di resistenza.



La sezione circolare cava

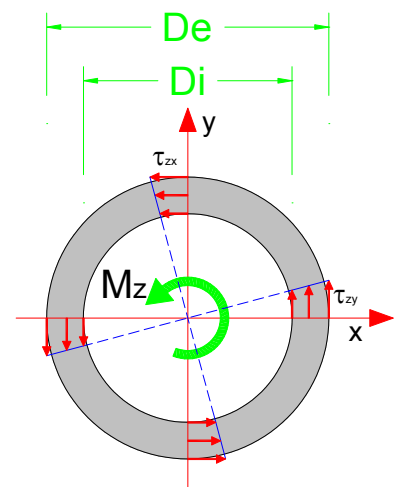
Per la sezione circolare cava può effettuarsi la stessa trattazione che è stata condotta sulla sezione circolare piena, pervenendo alle medesime espressioni per la tensione tangenziale e per l'angolo di torsione unitario.

$$\Theta = \frac{M_z}{G \cdot J_p}; \quad \tau = \frac{M_z}{J_p} \cdot r$$

Considerando che per la sezione circolare cava si ha

$$J_p = \frac{\pi \cdot (D_e^4 - D_i^4)}{32}$$

la massima tensione tangenziale sarà pari a



$$\tau = \frac{M_z}{\pi \cdot (D_e^4 - D_i^4)} \cdot \frac{D_e}{2} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{16 \cdot M_z \cdot D_e}{\pi \cdot (D_e^4 - D_i^4)}$$

e l'angolo specifico di torsione sarà:

$$\Theta = \frac{M_z}{G \cdot J_p} \quad \Rightarrow \quad \Theta = \frac{32 \cdot M_z}{G \cdot (D_e^4 - D_i^4)}$$

La sezione rettangolare

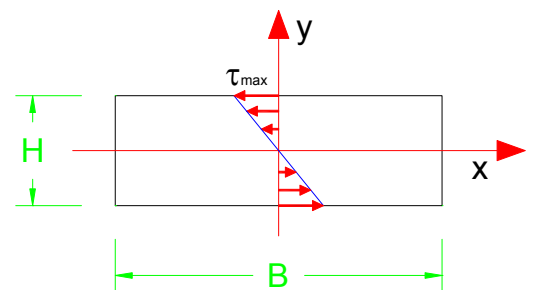
Consideriamo una sezione rettangolare di lati B e H considerando che B sia il lato maggiore: $B \geq H$.

La determinazione della tensione tangenziale massima e dell'angolo di torsione unitario può effettuarsi attraverso le seguenti formule:

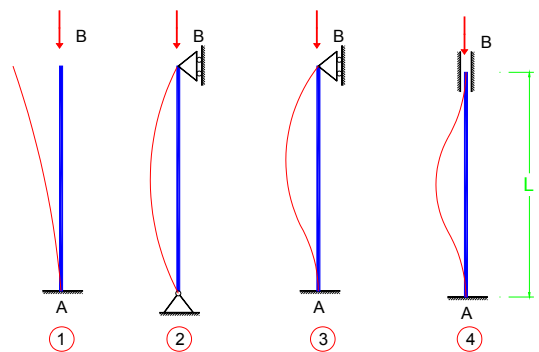
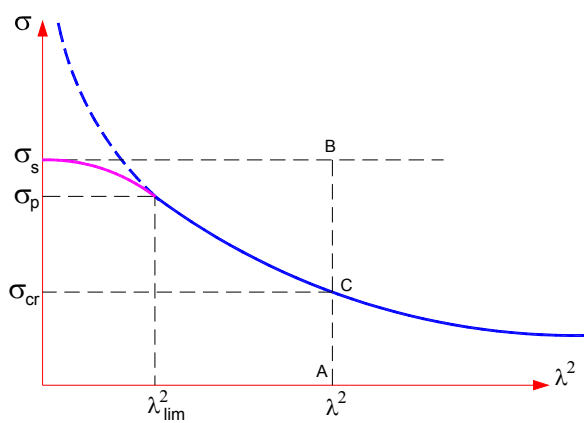
$$\Theta = K_1 \cdot \frac{M_z}{G \cdot B \cdot H^3}; \quad \tau_{\max} = K_2 \cdot \frac{M_z}{B \cdot H^2}$$

dove i coefficienti K_1 e K_2 rappresentano i fattori di torsione per la sezione rettangolare i cui si ricavano dalla tabella che segue in funzione del rapporto tra il lato maggiore ed il lato minore.

$\frac{B}{H}$	K_1	K_2
1	7,114	4,804
1,2	6,02	4,57
1,4	5,35	4,40
1,6	4,91	4,27
1,8	4,60	4,16
2	4,37	4,07
2,5	4,01	3,88
3	3,80	3,74
4	3,56	3,55
6	3,35	3,35
10	3,20	3,20
20	3,10	3,10
∞	3,00	3,00



IL CARICO CRITICO EULERIANO



Il problema del carico di punta

Abbiamo affrontato nel capitolo precedente il caso della sollecitazione di sforzo Normale semplice conseguendo come risultato che lo stato tensionale nella sezione fosse costituito da una tensione assiale costante in ogni punto e pari al rapporto tra lo sforzo Normale **N** applicato sulla sezione e l'area della sezione stessa:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Dal punto di vista della deformazione, la sollecitazione di sforzo Normale semplice comporta che il materiale costituente la sezione sia sottoposto ad una deformazione assiale unitaria ε uguale in ogni punto della sezione, la quale si deforma attraverso una traslazione uniforme e senza alcuna rotazione della linea d'asse del tronco di trave analizzato.

Tale comportamento deformativo, seppure risulta certamente valido per la condizione di sforzo Normale di trazione, nel caso di sollecitazione di compressione semplice si dimostra non sempre aderente alla realtà e facilmente confutabile attraverso una semplice dimostrazione pratica.

Si provi infatti a sottoporre a sforzo normale di compressione un'asticella piuttosto snella o anche una normale riga da disegno posta in perfetta verticalità su di un tavolo. Si noterà che aumentando lentamente l'entità dello sforzo assiale applicato, l'asticella o la riga, ad un certo punto modificherà la sua conformazione rettilinea, mostrando un'evidente curvatura lungo la direzione meno rigida. Tale fenomeno in realtà risulta maggiormente evidente se si aumenta la lunghezza dell'asticella a parità di sezione o al contrario si utilizza un'asticella con una sezione più piccola a parità di lunghezza. Come vedremo successivamente il fenomeno è regolato da una grandezza, dipendente solo da fattori geometrici dell'asta e dalla condizione di vincolo alle estremità, che assume il nome di snellezza della trave.

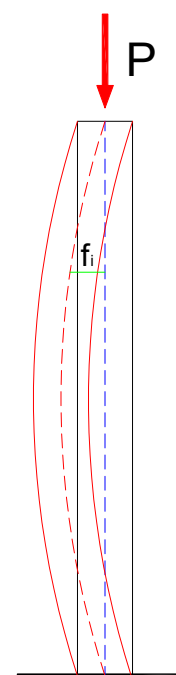
Il carico critico di Eulero

Per meglio comprendere il fenomeno di cui stiamo parlando, consideriamo un'asta come quella rappresentata a fianco e sottoponiamola ad uno sforzo centrato di compressione **P**.

Al crescere del valore di **P** l'asta perderà la sua conformazione rettilinea mostrando una certa inflessione che tenderà a crescere sempre più rapidamente al crescere di **P**. Per effetto di questa inflessione, in una generica sezione *i* dell'asta, oltre allo sforzo Normale **N** applicato nascerà una sollecitazione flessionale aggiuntiva dovuta all'eccentricità di **P** rispetto alla posizione deformata dell'asse della sezione. Se indichiamo con f_i la freccia della sezione considerata rispetto alla posizione iniziale indeformata, il momento flettente che nasce nella sezione è pari a:

$$M_i = P \cdot f_i$$

A tale Momento flettente esterno, si oppone un Momento interno determinato dalle tensioni che si sviluppano nella sezione. Fintanto che il Momento interno è superiore al Momento esterno applicato nella sezione, l'equilibrio risulterà stabile, quando invece il Momento esterno risulterà maggiore di quello interno l'asta si deformerà in maniera vistosa e l'equilibrio risulterà instabile. Esiste una condizione per la quale si ha l'uguaglianza tra il Momento interno alla sezione ed il momento esterno applicato, in tale circostanza l'asta si trova in una condizione che viene definita critica alla quale corrisponde il limite dell'equilibrio stabile.



La determinazione del valore del carico P_{cr} detto carico critico per il quale si determina proprio la condizione di equilibrio limite, è stata studiata da Eulero che è pervenuto alla seguente espressione:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{l_0^2}$$

dove :

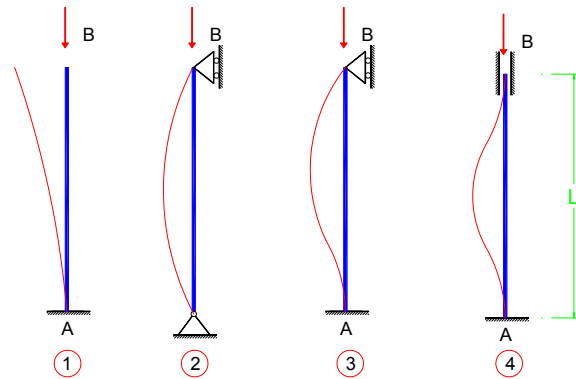
E = Modulo di elasticità lineare del materiale

J_{\min} = Momento di inerzia minimo della sezione

l_0 = lunghezza libera di inflessione della trave.

La lunghezza libera di inflessione, esprime l'influenza della condizione di vincolo all'estremità dell'asta che definisce la forma e l'estensione della deformata della trave. Si riportano appresso alcune configurazioni di vincolo della trave con la relativa valutazione della lunghezza libera di inflessione da introdurre nella formula di Eulero.

Schema	l_0
1	$l_0 = 2 \cdot L$
2	$l_0 = L$
3	$l_0 = \frac{L}{\sqrt{2}}$
4	$l_0 = \frac{L}{2}$



Ai fini delle verifiche il carico massimo che può essere applicato sull'asta si ottiene riducendo il carico critico di Eulero con un opportuno coefficiente di sicurezza dipendente dal materiale con il quale l'asta è realizzata.

$$P_{eff} = \frac{P_{cr}}{n}$$

dove n è appunto il coefficiente di sicurezza.

Se dividiamo il carico critico per l'area della sezione costituente l'asta, ricaviamo la tensione critica:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{A \cdot l_0^2}$$

Poiché il momento d'inerzia minimo è esprimibile come prodotto dell'area della sezione per il quadrato del raggio d'inerzia minimo, si ha:

$$J_{\min} = A \cdot i_{\min}^2$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A \cdot i_{\min}^2}{A \cdot l_0^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_{\min}^2}{l_0^2}$$

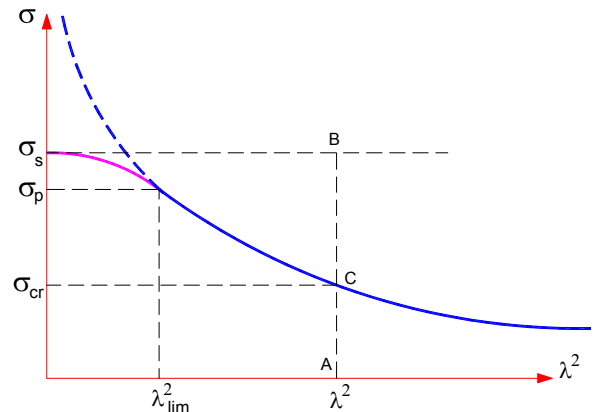
Se definiamo il grado di snellezza : $\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}}$ si ha:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

L'espressione della tensione critica Euleriana appena determinata rappresenta una iperbole nel piano $\lambda^2 - \sigma$

Per valori piccoli della snellezza λ , la relazione di Eulero fornisce valori della tensione critica non coerenti con la caratteristica elastica del materiale, e addirittura può fornire valori della tensione critica superiori alla tensione di snervamento del materiale. Esiste un valore particolare della snellezza definita snellezza limite del materiale, per il quale la tensione critica di Eulero corrisponde alla σ di proporzionalità del materiale.

$$\sigma_p = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_{\lim}^2} \Rightarrow \lambda_{\lim} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$



Per valori della snellezza inferiori alla snellezza limite del materiale, la relazione di Eulero perde la sua validità e diviene inapplicabile.

Per valori superiori alla snellezza limite la relazione di Eulero è valida e ci fornisce la tensione critica che moltiplicata per l'Area della sezione ci permette di calcolare il carico critico.

Per poter rendere applicabile la relazione di Eulero anche per valori della snellezza inferiori a quella limite occorre procedere ad una correzione della curva (tratto disegnato in verde) facendo variare in questo tratto il valore del modulo elastico secondo la reale legge di legame elastico del materiale.

Il metodo omega

Dalla relazione di Eulero in funzione della snellezza dell'asta e del modulo di Elasticità del materiale, si determina la tensione critica che moltiplicata per l'area della sezione ci consente di calcolare il carico critico per l'asta.

Consideriamo un punto della curva di Eulero di ascissa λ corrispondente alla tensione critica σ_{cr} .

Se definiamo in tale punto la grandezza $\omega = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, considerato che la lunghezza del segmento

\overline{AB} è pari a σ_s e che la lunghezza del segmento \overline{AC} è pari a σ_{cr} possiamo definire la tensione critica come:

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_s}{\omega}$$

Se costruiamo delle tabelle relative ai diversi materiali che ci forniscono i valori del coefficiente ω al variare della snellezza λ , possiamo determinare in maniera più semplice che con la formula di Eulero la tensione critica e quindi il carico critico dell'asta.

$$P_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = \frac{\sigma_s \cdot A}{\omega}$$

Applicando al carico critico un opportuno coefficiente di sicurezza dipendente dal materiale, possiamo determinare il carico effettivo che potrà essere applicato sull'asta.

$$P_{eff} = \frac{P_{cr}}{s} = \frac{\sigma_{cr} \cdot A}{s} = \frac{\sigma_s \cdot A}{s \cdot \omega}$$

Considerando che a seconda del metodo di verifica utilizzato il rapporto: $\frac{\sigma_s}{s}$ corrisponde o alla tensione di progetto del materiale o comunque detta alla tensione ammissibile,

$$\sigma_a = \frac{\sigma_s}{s}$$

il carico effettivo che si potrà applicare sull'asta è dato da:

$$P_{eff} = \frac{\sigma_a \cdot A}{\omega}$$

Dalla espressione appena scritta si ricava l'espressione tipica per la verifica di un'asta compressa con il metodo omega. Infatti assegnate le dimensioni geometriche dell'asta ed il carico che su questa agisce, con il metodo delle tensioni ammissibili, la verifica viene condotta verificando che la tensione del materiale ottenuta amplificando il carico applicato per il fattore ω risulti inferiore della tensione ammissibile.

$$\sigma = \frac{\omega \cdot P}{A} \leq \sigma_a$$

Il progetto di una sezione con il metodo omega risulta invece più elaborato, infatti stante la dipendenza di ω dalle dimensioni geometriche della sezione, il progetto andrà condotto con un procedimento iterativo che sarà illustrato praticamente nello svolgimento degli esempi che seguono.

Si riportano due esempi di tabelle fornite dalle norme tecniche per la determinazione del coefficiente ω che saranno utili nello svolgimento degli esempi numerici.

Coefficienti ω per aste in legno massiccio (Din 1052-88)

λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
ω	1,00	1,04	1,08	1,15	1,26	1,42	1,62	1,88	2,20	2,58	3,00	3,63	4,32	5,07

λ	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250
ω	5,88	6,75	7,68	8,67	9,72	10,83	12,00	13,23	14,52	15,87	17,28	18,75

Coefficienti ω per profili in acciaio Fe 360 con sezione tipo HE (curva c UNI 10011-88)

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
20	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06
30	1,06	1,07	1,08	1,08	1,09	1,10	1,10	1,11	1,12	1,12
40	1,13	1,14	1,15	1,16	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21
50	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29	1,30	1,32
60	1,33	1,34	1,35	1,36	1,38	1,39	1,40	1,42	1,43	1,45
70	1,46	1,48	1,49	1,51	1,52	1,54	1,56	1,57	1,59	1,60
80	1,62	1,64	1,66	1,67	1,69	1,71	1,73	1,75	1,77	1,79
90	1,81	1,83	1,84	1,86	1,88	1,90	1,92	1,95	1,97	1,99
100	2,01	2,03	2,05	2,08	2,10	2,12	2,15	2,17	2,19	2,22
110	2,24	2,27	2,29	2,32	2,35	2,37	2,40	2,43	2,45	2,48
120	2,51	2,54	2,56	2,59	2,62	2,65	2,68	2,71	2,74	2,77
130	2,80	2,83	2,86	2,89	2,92	2,96	2,99	3,02	3,05	3,08
140	3,11	3,15	3,18	3,21	3,25	3,28	3,32	3,35	3,39	3,42
150	3,46	3,50	3,54	3,58	3,62	3,65	3,69	3,73	3,77	3,81
160	3,85	3,89	3,95	3,98	4,02	4,06	4,10	4,14	4,18	4,22
170	4,28	4,30	4,35	4,39	4,43	4,47	4,52	4,56	4,60	4,64
180	4,69	4,73	4,77	4,82	4,86	4,90	4,95	4,99	5,04	5,08
190	5,13	5,17	5,22	5,26	5,31	5,36	5,40	5,44	5,49	5,54
200	5,60	5,65	5,70	5,75	5,80	5,85	5,91	5,96	6,01	6,06
210	6,11	6,16	6,21	6,27	6,32	6,35	6,43	6,49	6,54	6,60
220	6,65	6,71	6,76	6,81	6,87	6,93	6,98	7,04	7,09	7,14
230	7,20	7,25	7,30	7,36	7,41	7,47	7,53	7,59	7,65	7,70
240	7,75	7,81	7,89	7,96	8,02	8,07	8,12	8,17	8,23	8,30
250	8,36									

Esempi applicativi

Esercizio 1)

Si progetti un pilastro in legno a sezione quadrata, alto 2,80 m e soggetto ad carico centrato pari a 100 KN. Il pilastro risulta incastrato alla base e libero da vincoli in sommità. Si consideri per il materiale una tensione assiale ammissibile pari a 8,5 MPa.

Per la mensola, si ha che la lunghezza libera di inflessione è pari a due volte la lunghezza effettiva dell'asta:

$$l_0 = 2 \cdot l = 2 \cdot 2800 = 5600 \text{ mm}$$

Il coefficiente ω risulta funzione della snellezza λ , la quale dipende anche dalle dimensioni della sezione da progettare.

Il procedimento di progetto deve quindi procedere per successive approssimazioni fino all'individuazione dell'appropriato valore della snellezza da considerare per il progetto della sezione.

1° Tentativo: Ipotizziamo $\lambda = 80$.

Dalla tabella il primo valore di tentativo del coefficiente $\omega = 2,20$.

Con la formula di progetto calcoliamo l'area della sezione quadrata e quindi la lunghezza del lato.

$$A = \frac{\omega \cdot P}{\sigma_a} = \frac{2,20 \cdot 100 \cdot 10^3}{8,5} = 25882 \text{ mm}^2$$

$$B = H = \sqrt{A} = \sqrt{25882} = 161 \text{ mm}$$

Con la lunghezza del lato appena calcolato determiniamo il raggio d'inerzia della sezione e quindi la snellezza.

$$i = \frac{B}{\sqrt{12}} = \frac{161}{\sqrt{12}} = 46,48 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{5600}{46,48} = 120$$

La snellezza calcolata della sezione è diversa da quella ipotizzata, quindi procediamo ad un secondo tentativo ipotizzando un valore intermedio della snellezza.

2° Tentativo: Ipotizziamo $\lambda = 100$

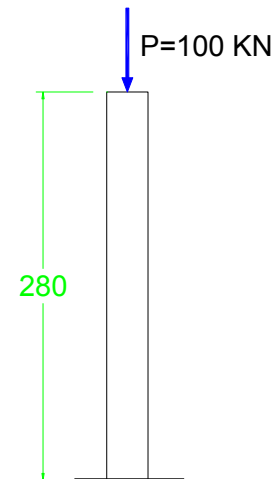
Dalla tabella ricaviamo che per $\lambda = 100$ il coefficiente $\omega = 3,00$

Riprocediamo applicando le formule di progetto a calcolare il lato della sezione e quindi di nuovo la snellezza.

$$A = \frac{\omega \cdot P}{\sigma_a} = \frac{3,00 \cdot 100 \cdot 10^3}{8,5} = 35294 \text{ mm}^2$$

$$B = H = \sqrt{A} = \sqrt{35294} = 188 \text{ mm}$$

$$i = \frac{B}{\sqrt{12}} = \frac{188}{\sqrt{12}} = 54,27 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{5600}{54,27} = 103$$



Come si vede già al secondo tentativo si è raggiunta una buona approssimazione. Per procedere quindi al progetto definitivo della sezione assumiamo $\lambda = 102$.

Dimensionamento della sezione

Per $\lambda = 102$ dalle tabelle ricaviamo attraverso l'interpolazione lineare il seguente valore di ω .

$$\omega = 3,00 + \frac{3,63 - 3,00}{10} \cdot 2 \cong 3,13$$

$$A = \frac{\omega \cdot P}{\sigma_a} = \frac{3,13 \cdot 100 \cdot 10^3}{8,5} = 36824 \text{ mm}^2$$

$$B = H = \sqrt{A} = \sqrt{36824} = 192 \text{ mm}$$

Adottiamo per la sezione una dimensione commercialmente plausibile e quindi una sezione a forma quadrata di lato pari a 200 mm.

Verifica della sezione

Con le dimensioni effettive della sezione che abbiamo adottato, determiniamo la snellezza dell'asta e quindi il coefficiente amplificativo ω .

$$i = \frac{B}{\sqrt{12}} = \frac{200}{\sqrt{12}} = 57,74 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{5600}{57,74} \cong 97$$

Per $\lambda = 97$ si ricava dalla tabella il seguente valore di ω .

$$\omega = 2,58 + \frac{3,00 - 2,58}{10} \cdot 7 \cong 2,87$$

Procediamo alla verifica della sezione.

$$\sigma = \frac{\omega \cdot P}{A} = \frac{2,87 \cdot 100 \cdot 10^3}{200^2} = 7,18 < \sigma_a$$

La sezione è verificata.

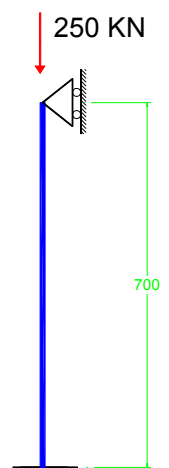
Esercizio 2)

Si progetti il pilastro di un capannone in Acciaio alto 7 m con e soggetto ad carico centrato pari a 250 KN. Il pilastro può considerarsi incastrato alla base e appoggiato in sommità. Si adotti nel calcolo un acciaio tipo Fe 360 ed profilo di sezione tipo HE.

Per un pilastro incastrato alla base ed appoggiato in sommità, la lunghezza libera di inflessione è pari a :

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot l \cong 0,701 \cdot l$$

Nel caso specifico si ha: $l_0 = 0,701 \cdot 700 \cong 491 \text{ cm}$



La tensione ammissibile per l'acciaio Fe 360 è: $\sigma_a = 160 \text{ MPa}$

Fase di progetto

Anche in questo caso per eseguire il progetto della sezione dovremo procedere per successivi tentativi. I coefficienti ω saranno ricavati dalla tabella di cui alla curva c riportata in precedenza, e le sezioni con i relativi valori statici saranno desunte dal sagomario.

1° Tentativo: $\lambda = 100 \quad \Rightarrow \quad \omega = 2,01$

$$A = \frac{\omega \cdot P}{\sigma_a} = \frac{2,01 \cdot 250 \cdot 10^3}{160} = 31,41 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 = 31,41 \text{ cm}^2$$

Dal sagomario, considerando solo sezioni HE tipo B, optiamo per una sezione HE 120 B la quale presenta i seguenti valori statici:

$$A = 34,01 \text{ cm}^2; \quad i_{\min} = i_y = 3,06 \text{ cm}$$

La snellezza della sezione ricavata risulterebbe: $\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{491}{3,06} \cong 160$

Essendo enormemente diverso il valore della snellezza calcolato da quello ipotizzato, si procede ad un secondo tentativo assumendo un valore di λ intermedio.

2° Tentativo: $\lambda = 130 \quad \Rightarrow \quad \omega = 2,80$

$$A = \frac{\omega \cdot P}{\sigma_a} = \frac{2,80 \cdot 250 \cdot 10^3}{160} = 43,75 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 = 43,75 \text{ cm}^2$$

Dal sagomario ricavo che la sezione da utilizzare è la HE 160 B, la quale presenta i seguenti valori statici:

$$A = 54,25 \text{ cm}^2; \quad i_{\min} = i_y = 4,05 \text{ cm}$$

La snellezza della sezione risulta: $\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{491}{4,05} \cong 121$

Avendo raggiunto una sufficiente approssimazione procediamo alla verifica della sezione.

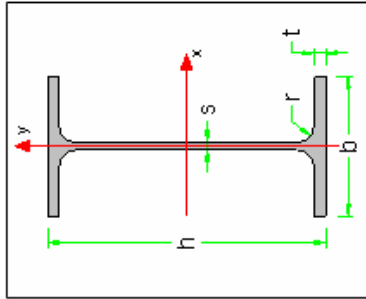
Fase di verifica

Per $\lambda = 121$ si ricava dalla tabella $\omega = 2,51$

$$\sigma = \frac{\omega \cdot P}{A} = \frac{2,51 \cdot 250 \cdot 10^3}{54,25 \cdot 10^2} = 116 \text{ MPa} < \sigma_a \quad \text{La sezione è verificata.}$$

SAGOMARIO DEI PROFILATI METALLICI SEZIONI TIPO IPE E HE

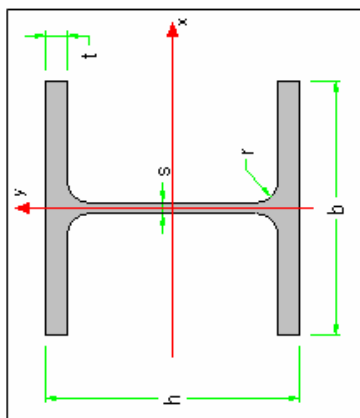
PROFILATI TIPO IPE (UNI 5398-64)



Jx e Jy - Momenti d'inerzia della sezione
ix e iy - raggi d'inerzia
W_{el,x} e W_{el,y} - Moduli di resistenza elastici della sezione
W_{pl,x} e W_{pl,y} - Moduli di resistenza plastici della sezione

Designazione del profilo	Massa (Kg/m)	Dimensioni							Valori Statici relativi all'asse x				Valori Statici relativi all'asse y			
		h (mm)	b (mm)	t (mm)	s (mm)	r (mm)	Area (cm ²)	Jx (cm ⁴)	ix (cm)	W _{el,x} (cm ³)	W _{pl,x} (cm ³)	Jy (cm ⁴)	iy (cm)	W _{el,y} (cm ³)	W _{pl,y} (cm ³)	
IPE 100	8,10	100	55	5,7	4,1	7	10,32	171,01	4,07	34,20	39,41	15,92	1,24	5,79	9,15	
IPE 120	10,37	120	64	6,3	4,4	7	13,21	317,75	4,90	52,96	60,73	27,67	1,45	8,65	13,58	
IPE 140	12,89	140	73	6,9	4,7	7	16,43	541,22	5,74	77,32	88,34	44,92	1,65	12,31	19,25	
IPE 160	15,77	160	82	7,4	5	9	20,09	869,29	6,58	108,66	123,86	68,31	1,84	16,66	26,10	
IPE 180	18,80	180	91	8	5,3	9	23,95	1316,96	7,42	146,33	166,41	100,85	2,05	22,16	34,60	
IPE 200	22,36	200	100	8,5	5,6	12	28,48	1943,17	8,26	194,32	220,64	142,37	2,24	28,47	44,61	
IPE 220	26,20	220	110	9,2	5,9	12	33,37	2771,84	9,11	251,99	285,41	204,89	2,48	37,25	58,11	
IPE 240	30,71	240	120	9,8	6,2	15	39,12	3891,62	9,97	324,30	366,65	283,63	2,69	47,27	73,92	
IPE 270	36,07	270	135	10,2	6,6	15	45,95	5789,78	11,23	428,87	484,00	419,87	3,02	62,20	96,95	
IPE 300	42,24	300	150	10,7	7,1	15	53,81	8356,10	12,46	557,07	628,36	603,78	3,35	80,50	125,22	
IPE 330	49,15	330	160	11,5	7,5	18	62,61	11766,89	13,71	713,15	804,33	788,14	3,55	98,52	153,68	
IPE 360	57,09	360	170	12,7	8	18	72,73	16265,62	14,95	903,65	1019,15	1043,45	3,79	122,76	191,10	
IPE 400	66,30	400	180	13,5	8,6	21	84,46	23128,35	16,55	1156,42	1307,15	1317,82	3,95	146,42	229,00	
IPE 450	77,57	450	190	14,6	9,4	21	98,82	33742,91	18,48	1499,69	1701,79	1675,86	4,12	176,41	276,38	
IPE 500	90,68	500	200	16	10,2	21	115,52	48198,50	20,43	1927,94	2194,12	2141,68	4,31	214,17	335,88	
IPE 550	105,52	550	210	17,2	11,1	24	134,42	67116,46	22,35	2440,60	2787,01	2667,58	4,45	254,06	400,54	
IPE 600	122,45	600	220	19	12	24	155,98	92083,40	24,30	3069,45	3512,40	3387,34	4,66	307,94	485,65	

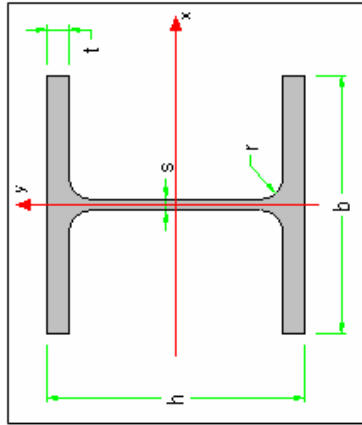
PROFILATI TIPO HE (UNI 5397-64)



J_x e J_y - Momenti d'inerzia della sezione
ix e iy - raggi d'inerzia
W_{el,x} e W_{el,y} - Moduli di resistenza elastici della sezione
W_{pl,x} e W_{pl,y} - Moduli di resistenza plastici della sezione

Designazione del profilo	Massa (Kg/m)	Dimensioni						Valori Statici relativi all'asse x						Valori Statici relativi all'asse y					
		h (mm)	b (mm)	t (mm)	s (mm)	r (mm)	Area (cm ²)	J _x (cm ⁴)	ix (cm)	W _{el,x} (cm ³)	W _{pl,x} (cm ³)	J _y (cm ⁴)	iy (cm)	W _{el,y} (cm ³)	W _{pl,y} (cm ³)				
HE 100	A 16,67 B 20,44 M 41,79	96 100 120	100 100 106	8 10 20	5 6 12	12 12 12	21,24 26,04 53,24	349,22 449,54 1142,61	4,06 4,16 4,63	72,76 89,91 190,44	83,01 104,21 235,81	133,81 167,27 399,15	2,51 2,53 2,74	26,76 33,45 75,31	41,14 51,42 116,31				
HE 120	A 19,89 B 26,69 M 52,13	114 120 140	120 120 126	8 11 21	5 6,5 12,5	12 12 12	25,34 34,01 66,41	606,15 864,37 2017,57	4,89 5,04 5,51	106,34 144,06 288,22	119,49 165,21 360,61	230,90 317,52 702,77	3,02 3,06 3,25	38,48 52,92 111,55	58,85 80,97 171,63				
HE 140	A 24,66 B 33,72 M 63,24	133 140 160	140 140 146	8,5 12 22	5,5 7 13	12 12 12	31,42 42,96 80,56	1033,13 1509,23 3291,36	5,73 5,93 6,39	155,36 215,60 411,42	173,50 245,43 493,83	389,32 549,67 1144,34	3,52 3,58 3,77	55,62 78,52 156,76	84,85 119,78 240,51				
HE 160	A 30,44 B 42,59 M 76,19	152 160 180	160 160 166	9 13 23	6 8 14	15 15 15	38,77 54,25 97,05	1672,97 2492,00 5098,26	6,57 6,78 7,25	220,13 311,50 566,47	245,15 363,97 674,57	615,57 889,23 1758,77	3,98 4,05 4,26	76,95 111,15 211,90	117,63 169,96 325,46				
HE 180	A 35,52 B 51,22 M 88,90	171 180 200	180 180 186	9,5 14 24	6 8,5 14,5	15 15 15	45,25 65,25 113,25	2510,28 3831,13 7483,13	7,45 7,66 8,13	293,60 425,68 748,31	324,85 481,45 883,45	924,60 1362,85 2580,13	4,52 4,57 4,77	102,73 151,43 277,43	156,49 231,01 425,19				
HE 200	A 42,26 B 61,29 M 103,06	190 200 220	200 200 206	10 15 25	6,5 9 15	18 18 18	53,83 78,08 131,28	3692,15 5696,17 10641,90	8,28 8,54 9,00	368,65 569,62 967,45	429,48 642,55 1135,15	1335,51 2003,37 3651,21	4,98 5,07 5,27	133,55 200,34 354,49	203,82 305,81 543,22				

PROFILATI TIPO HE (UNI 5397-64)

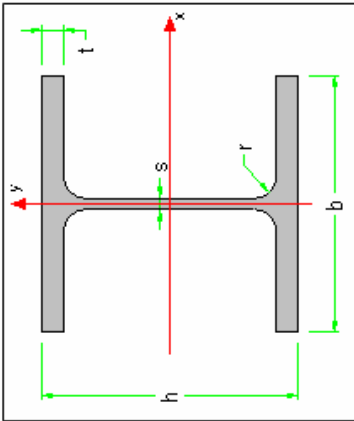


Jx e Jy - Momenti d'inerzia della sezione
ix e iy - raggi d'inerzia
W_{el-x} e W_{el-y} - Moduli di resistenza elastici della sezione
W_{pl-x} e W_{pl-y} - Moduli di resistenza plastici della sezione

Designazione del profilo	Massa (Kg/m)	Dimensioni						Valori Statici relativi all'asse x						Valori Statici relativi all'asse y					
		h (mm)	b (mm)	t (mm)	s (mm)	r (mm)	Area (cm ²)	Jx (cm ⁴)	ix (cm)	W _{el-x} (cm ³)	W _{pl-x} (cm ³)	Jy (cm ⁴)	iy (cm)	W _{el-y} (cm ³)	W _{pl-y} (cm ³)				
A	50,51	210	220	11	7	18	64,34	5409,69	9,17	515,21	568,46	1954,56	5,51	177,69	270,59				
HE 220	71,47	220	220	16	9,5	18	91,04	8090,96	9,43	735,54	827,05	2843,26	5,59	258,48	393,88				
M	117,31	240	226	26	15,5	18	149,44	14604,83	9,89	1217,07	1419,45	5012,05	5,79	443,54	678,55				
A	60,32	230	240	12	7,5	21	76,84	7763,17	10,05	675,06	744,62	2768,81	6,00	230,73	351,69				
HE 240	83,20	240	240	17	10	21	105,99	11259,29	10,31	938,27	1053,15	3922,66	6,08	326,89	498,42				
M	156,67	270	248	32	18	21	199,59	24289,49	11,03	1799,22	2116,95	8152,62	6,39	657,47	1005,93				
A	68,15	250	260	12,5	7,5	24	86,82	10454,94	10,97	836,39	919,77	3667,56	6,50	282,12	430,17				
HE 260	92,98	260	260	17,5	10	24	118,44	14919,41	11,22	1147,65	1262,91	5134,51	6,58	394,96	602,25				
M	172,42	290	268	32,5	18	24	219,64	31306,84	11,94	2159,09	2523,61	10448,58	6,90	779,74	1192,47				
A	76,35	270	280	13	8	24	97,26	13673,28	11,86	1012,84	1112,22	4762,64	7,00	340,19	518,13				
HE 280	103,12	280	280	18	10,5	24	131,36	19270,25	12,11	1376,45	1534,43	6594,52	7,09	471,04	717,57				
M	188,53	310	288	33	18,5	24	240,16	39547,32	12,83	2551,44	2965,63	13162,76	7,40	914,08	1396,68				
A	88,33	290	300	14	8,5	27	112,53	18263,47	12,74	1259,55	1363,27	6309,55	7,49	420,64	641,17				
HE 300	117,03	300	300	19	11	27	149,08	25165,65	12,99	1677,71	1868,67	8562,82	7,58	570,85	870,14				
M	237,92	340	310	39	21	27	303,08	59200,98	13,98	3482,41	4077,67	19403,07	8,00	1251,81	1913,18				
A	97,63	310	300	15,5	9	27	124,37	22928,56	13,58	1479,26	1628,09	6986,23	7,49	465,68	709,74				
HE 320	126,65	320	300	20,5	11,5	27	161,34	30623,51	13,82	1926,47	2149,24	9238,82	7,57	615,92	939,10				
M	244,96	359	309	40	21	27	312,05	68134,82	14,78	3795,81	4436,03	19709,31	7,95	1275,68	1950,72				

PROFILATI TIPO HE (UNI 5397-64)

J_x e J_y - Momenti d'inerzia della sezione
ix e iy - raggi d'inerzia
W_{el-x} e W_{el-y} - Moduli di resistenza elastici della sezione
W_{pl-x} e W_{pl-y} - Moduli di resistenza plastici della sezione



Designazione del profilo	Massa (Kg/m)	Dimensioni						Valori Statici relativi all'asse x						Valori Statici relativi all'asse y					
		h (mm)	b (mm)	t (mm)	s (mm)	r (mm)	Area (cm ²)	J _x (cm ⁴)	ix (cm)	W _{el-x} (cm ³)	W _{pl-x} (cm ³)	J _y (cm ⁴)	iy (cm)	W _{el-y} (cm ³)	W _{pl-y} (cm ³)				
HE 340	A 104,03 B 134,15 M 247,92	320 340 377	300 300 309	16,5 21,5 40	9,5 12 21	27 27 27	132,52 170,90 315,83	26875,89 36656,36 76371,64	13,97 14,65 15,55	1617,24 2156,26 4051,55	1783,98 2408,11 4717,57	7436,92 9689,93 19710,70	7,49 7,53 7,90	495,73 646,00 1275,77	755,72 985,72 1952,71				
HE 360	A 112,06 B 141,80 M 250,26	350 360 395	300 300 308	17,5 22,5 40	10 12,5 21	27 27 27	142,76 180,63 318,81	33089,75 43193,42 84866,99	15,22 15,46 16,32	1890,84 2399,63 4297,06	2088,47 2682,99 4989,32	7886,84 10141,16 19521,75	7,43 7,49 7,83	525,79 676,08 1267,65	802,28 1032,49 1942,35				
HE 400	A 124,80 B 155,26 M 255,74	390 400 432	300 300 307	19 24 40	11 13,5 21	27 27 27	158,98 197,78 325,78	45069,35 57680,48 104119,05	16,84 17,08 17,88	2311,25 2884,02 4820,33	2561,80 3231,74 5570,62	8563,82 10819,03 19335,49	7,34 7,40 7,70	570,92 721,27 1259,64	872,86 1104,04 1934,13				
HE 450	A 139,75 B 171,11 M 263,32	440 450 478	300 300 307	21 26 40	11,5 14 21	27 27 27	178,03 217,98 335,44	63721,58 79887,52 131484,29	18,92 19,14 19,80	2896,44 3550,56 5501,43	3215,87 3982,37 6331,02	9465,32 11721,32 19339,04	7,29 7,33 7,59	631,02 781,42 1259,87	965,53 1197,66 1939,20				
HE 500	A 155,07 B 187,33 M 270,27	490 500 524	300 300 306	23 28 40	12 14,5 21	27 27 27	197,54 238,64 344,30	86974,72 107175,73 161928,88	20,98 21,19 21,69	3549,99 4287,03 6180,49	3948,86 4814,57 7094,27	10367,05 12623,91 19154,71	7,24 7,27 7,46	691,14 841,59 1251,94	1058,51 1291,65 1932,02				
HE 550	A 166,23 B 199,44 M 278,19	540 550 572	300 300 306	24 29 40	12,5 15 21	27 27 27	211,76 254,06 354,38	111932,16 136690,81 197983,89	22,99 23,20 23,64	4145,64 4970,57 6922,51	4621,82 5590,61 7932,68	10819,04 13076,89 19158,41	7,15 7,17 7,35	721,27 871,79 1252,18	1106,90 1341,14 1937,31				

